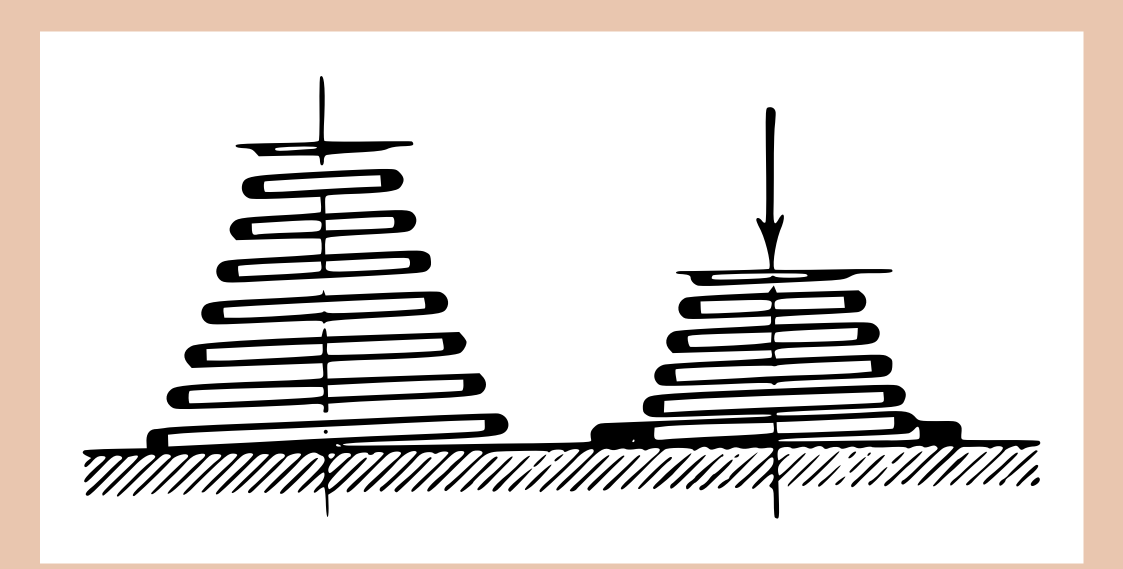
V. Feodossiev

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX: PROBLÈMES ET QUESTIONS CHOISIS



Éditions Mir Moscou

В. И. ФЕОДОСЬЕВ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. FÉODOSSIEV

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX: PROBLÈMES ET QUESTIONS CHOISIS

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par
M. SEGASAYO

на французском языке

PRÉFACE

Le présent ouvrage n'est pas un recueil de problèmes dans le sens habituel du mot. Il contient des problèmes destinés non pas à des débutants mais à des lecteurs se trouvant sur le point de terminer le cours de résistance des matériaux. Son dessein n'est pas de donner un exposé exhaustif de tout le cours, mais d'attirer l'attention du lecteur sur certains problèmes délicats que l'on passe outre dans le cours ordinaire ou, sur ce genre de problèmes qui souvent échappent à l'attention de l'étudiant non seulement au cours de sa formation, mais encore au cours de son activité ultérieure.

Le degré de difficulté des problèmes est aussi différent: il y en a de simples et de compliqués. La résolution de certains n'exige, dans le cadre des connaissances habituelles, que de la présence d'esprit; il y en a d'autres pour lesquels il est indispensable de recourir à l'appareil le plus élémentaire de la théorie de l'élasticité. Pour de nombreux problèmes, apparemment compliqués, la solution s'avère d'une facilité surprenante. Pour d'autres, la réponse qui à première vue paraissait évidente, peut s'avérer fausse.

En résolvant des problèmes de ce genre, même un lecteur averti n'est pas immunisé contre des erreurs éventuelles. Aussi, tous les problèmes sont-ils accompagnés de solutions détaillées dont le but est d'élargir l'horizon des connaissances du lecteur s'intéressant non pas tant au processus qu'aux principes de résolution des problèmes, ou alors, de donner la possibilité de contrôler le résultat obtenu dans le cas où le lecteur aurait l'intention d'agir de sa façon et de résoudre le problème sans se conformer au schéma donné dans le livre.

L'auteur s'est décidé à publier ce livre qui, en quelque sorte, sort du commun, dans l'espoir qu'il sera utile à un nombre assez grand de lecteurs.

L'expérience de travail montre que la majorité d'étudiants sont loin de se satisfaire toujours de la solution des problèmes-types exposés dans les recueils d'exercices habituels. Nombreux sont les étudiants qui se posent souvent des problèmes dépassant le cadre du cours et exigeant une compréhension beaucoup plus profonde de la matière;

il est donc naturel leur désir de mesurer leurs forces en résolvant des problèmes plus compliqués et plus intéressants pour lesquels il faut plus de présence d'esprit, de connaissances et d'assiduité.

Par comparaison aux première et seconde éditions, le recueil est complété par une série de problèmes nouveaux. Les plus intéressants et les plus originaux sont, de l'avis de l'auteur, les problèmes se rapportant à la stabilité non linéaire et au passage des formes d'équilibre aux formes de translation.

Au cours de ces dernières années, on a introduit dans l'arsenal des chercheurs les méthodes d'analyse au moyen de calculatrices. Ce qui était autrefois inaccessible est devenu affaire de tous les jours. Tenant compte du fait que la technique de calcul électronique est aujourd'hui utilisée non seulement par les boursiers de thèse mais aussi, dans pas mal de cas, par les étudiants, l'auteur a cru opportun d'introduire dans le recueil quelques problèmes qui peuvent être résolus sur calculatrices. Cette démarche se justifie entièrement par un emploi de plus en plus croissant des machines électroniques qui, dans un avenir non lointain, deviendront l'instrument dominant de calcul.

Le présent ouvrage se propose avant tout de satisfaire à ces aspirations de la jeunesse. Il est écrit à un niveau de compréhension accessible aux étudiants sur le point d'achever le cours de résistance des matériaux. Ce livre peut aussi s'avérer utile aux professeurs débutants et susciter également de l'intérêt chez des ingénieurs s'intéressant à élever leur niveau de connaissances.

L'auteur estime pour lui un devoir agréable d'exprimer sa reconnaissance à L. Balbouch, V. Biderman, I. Birgger pour leur aide dans la sélection et la correction des problèmes ainsi qu'à L. Andréeva qui a pris une part active dans la préparation du manuscrit. Il sera également reconnaissant à tous ceux qui, à l'avenir, ne manqueront pas de lui faire part de leurs remarques sur le livre.

Auteur

PROBLÈMES ET QUESTIONS

I. TRACTION, COMPRESSION ET TORSION

1. Un système composé de deux barres est soumis à une sollicitation simultanée des forces P_1 et P_2 dirigées le long des barres (fig. 1, *a*).

L'énergie potentielle de déformation sera, comme on sait, égale à

$$U=\frac{P_1^2 l_1}{2E_1F_1}+\frac{P_2^2 l_2}{2E_2F_2}.$$

Après avoir calculé les dérivées partielles de la fonction de l'énergie potentielle par rapport aux forces P_1 et P_2, trouvons les déplacements du point A selon les directions *1* et *2* (u_1 et u_2, fig. 1, *b*):

$$u_1=\frac{P_1 l_1}{E_1F_1}, \quad u_2=\frac{P_2 l_2}{E_2F_2}.$$

Montrez graphiquement quel sera le déplacement total du point A.

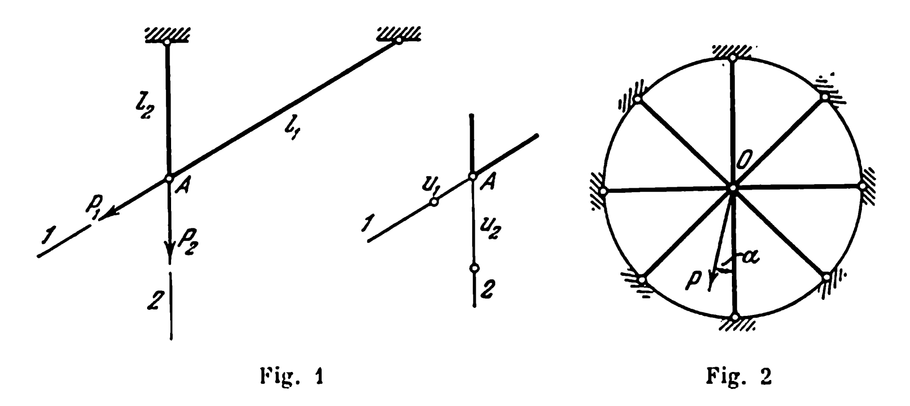


Fig. 1

Fig. 2

2. Une ferme plane (fig. 2) est composée de $n > 2$ barres identiques, uniformément distancées et réunies en un nœud commun. Une force P est appliquée dans le plan de la ferme. Montrer que le déplacement du nœud O restera toujours dirigé selon la direction de la force P et que la valeur de ce déplacement ne dépend pas de l'angle α.

3. Un système est composé de deux poutres rigides impondérables aux appuis articulés AC et EG, ainsi que de deux barres BE et CF. Au point D est appliquée une force P agissant le long de la barre CF (fig. 3).

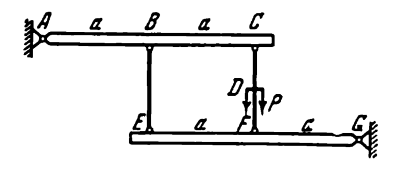


Fig. 3

1) Quel est le degré d'hyperstaticité de ce système?

2) Quelles sont les contraintes engendrées dans les barres?

4. Dans une plaque absolument rigide est pratiqué un orifice dans lequel se trouve un boulon flexible. Ce dernier est soumis à l'extension par une force de précontrainte N_0. Après le serrage, une force P est appliquée à l'écrou inférieur (fig. 4). Comment, dans ces conditions, changera la contrainte exercée sur le boulon?

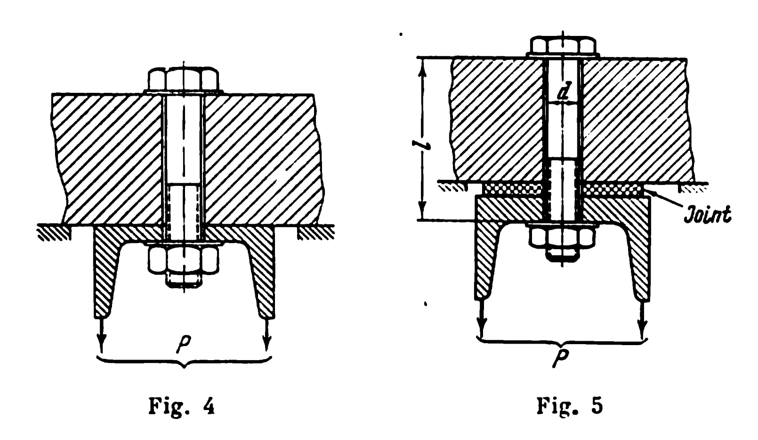


Fig. 4 Fig. 5

5. Les données du problème précédent sont compliquées de la manière suivante: sous l'écrou inférieur on fixe un joint flexible (fig. 5). Quand le joint est comprimé par une force P, son épaisseur diminue d'une valeur égale à

$$\Delta = \frac{P}{c},$$

c étant la rigidité du joint.

Comment, dans ce cas, va changer la contrainte exercée sur le boulon si à l'écrou inférieur est appliquée la force P?

6. Déterminer le moment de freinage ainsi que le déplacement de l'extrémité de la manette d'un frein à bande (point A, fig. 6) en fonction de la force P. Le coefficient de frottement sur la surface de

contact entre la courroie et la poulie est égal à f. La rigidité en traction de la courroie est supposée connue. La manette et la poulie peuvent être considérées comme absolument rigides.

7. Comment sera modifiée la solution du problème précédent si la poulie tourne dans un sens opposé?

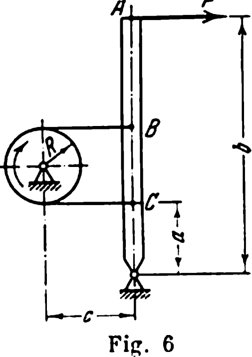


Fig. 6

8. Pour déterminer le module d'élasticité en compression d'un certain métal, on a fait l'expérience suivante: entre deux plaques massives en acier, une éprouvette de forme cylindrique est soumise à la compression (fig. 7). Pour assurer la prise de mesure des déformations, deux indicateurs sont fixés de telle façon que toute faute qui serait due au gauchissement des plaques se trouve exclue (fig. 7). Le mesurage a montré que le module d'élasticité en compression du métal en question était de

$$E_c = 0{,}8 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2.$$

Peut-on donner foi à un tel résultat?

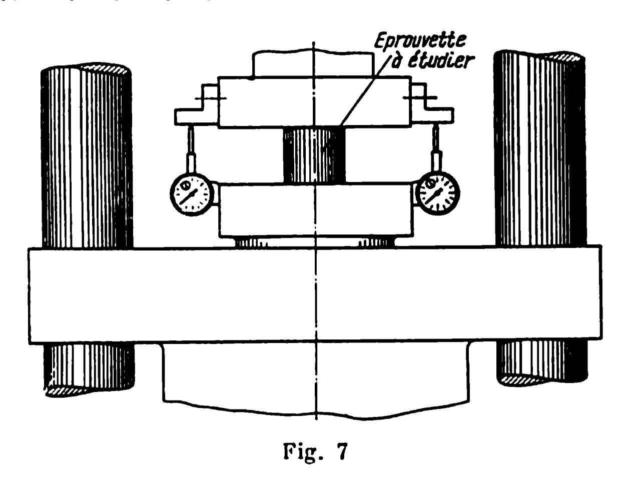


Fig. 7

9. Une barre droite, homogène et de section constante, est encastrée rigidement à ses extrémités (fig. 8). Montrer, sans calculs, qu'on

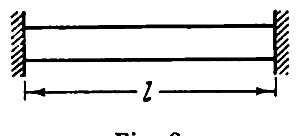


Fig. 8

n'observe pas de déplacements axiaux dans la barre si on la soumet à un échauffement uniforme.

10. Une barre encastrée à son extrémité supérieure est sollicitée par une force longitudinale P (fig. 9). Entre l'extrémité inférieure de la barre et l'appui inférieur rigide est laissé un espace libre Δ. Sous une force $P \geqslant EF\Delta/l$ cet espace libre se trouve recouvert. La réaction de l'appui inférieur, N, est déterminée à partir de la condition

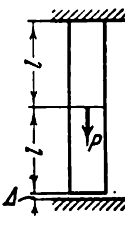


Fig. 9

$$\frac{(P-N)\,l}{EF}-\frac{Nl}{EF}=\Delta;$$

par conséquent, la contrainte dans la partie inférieure de la barre sera

$$N=\frac{P}{2}-\frac{\Delta}{l}\frac{EF}{2}.$$

La partie supérieure est étirée par une force égale à

$$P-N=\frac{P}{2}+\frac{\Delta}{l}\frac{EF}{2}.$$

Le déplacement du point d'application de la force P sera

$$\delta=\frac{Pl}{2EF}+\frac{\Delta}{2}.$$

Déterminons l'énergie élastique accumulée par la barre. D'un côté, cette énergie peut être calculée comme la somme des énergies contenues dans les parties supérieure et inférieure de la barre, c'est-à-dire

$$U=\frac{(P-N)^2\,l}{2EF}+\frac{N^2l}{2EF},$$

ou

$$U=\frac{P^2l}{4EF}+\frac{EF\Delta^2}{4l}. \qquad (1)$$

De l'autre côté, cette énergie est égale au travail accompli par la force P sur le déplacement δ, c'est-à-dire

$$U=\frac{P\delta}{2}=\frac{P^2l}{4EF}+\frac{P\Delta}{4}. \qquad (2)$$

Comme on le voit, ces deux expressions diffèrent. Où est le hic? Laquelle de ces expressions est juste?

11. Une barre droite homogène est appuyée sur une assise rigide (fig. 10, *a*). Trouvons le déplacement du centre de gravité de la barre sous l'action de son poids propre. Cela peut être fait suivant deux procédés.

Premier procédé. D'après la méthode habituelle, déterminons le déplacement du point (centre de gravité), situé à une distance $l/2$ à partir de l'assise (cf. le diagramme des déplacements, fig. 10, *b*). Il est aisé de vérifier que ce déplacement sera égal à

$$\Delta=\frac{3}{8}\frac{ql^2}{EF}, \qquad (1)$$

q étant le poids de la barre par unité de longueur (poids courant); EF, rigidité en compression.

Deuxième procédé. Trouvons la distance de l'assise au centre de

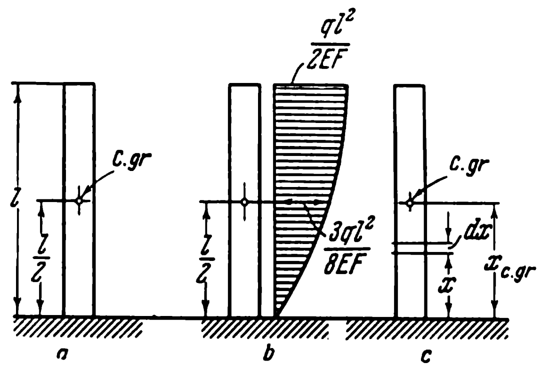


Fig. 10

gravité de la barre déformée (fig. 10, *b*). Cette distance sera la suivante:

$$x_{c.g.} = \frac{\int\limits_0 (x-u)\,dm}{m}. \tag{2}$$

Ici, dm est la masse d'un élément de longueur dx;

$$dm = \frac{q\,dx}{g}, \quad m = \frac{ql}{g},$$

u, déplacement courant calculé selon le diagramme (fig. 10, *b*), d'après la formule

$$u = \frac{qx}{EF}\left(l - \frac{x}{2}\right).$$

En mettant u, m et dm dans l'expression (2), calculons l'intégrale. On obtient alors

$$x_{c.g.} = \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{3EF}.$$

La solution cherchée, par conséquent, sera

$$\Delta = \frac{l}{2} - x_{c.g.} = \frac{ql^2}{3EF} \tag{3}$$

ce qui ne coïncide pas avec l'expression établie précédemment (1).

En quoi réside la raison de cette divergence?

12. Une corde flexible, étendue dans un plan horizontal, est soumise à la traction par une force T_0 entre deux appuis immobiles (fig. 11).

Quand on enlève le plan de support situé entre les deux appuis, la corde s'incurvera.

Etablir comment la valeur w_{max} d'incurvation dépend de la force de tension initiale T_0, ainsi que du poids par unité de longueur de la corde q. La rigidité en traction de la corde EF et sa longueur l sont supposées connues.

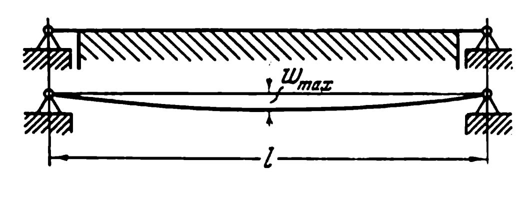


Fig. 11

13. Sur la fig. 12 est représentée la suspension d'un fil de contact d'une ligne de trolleybus.

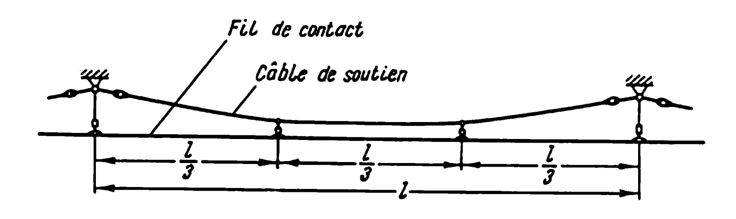


Fig. 12

Déterminer la traction et tracer la courbe de la flèche du câble de soutien si ce dernier, avant la suspension du fil inférieur, avait une flèche d'incurvation libre égale à w_{0max}.

Effectuer une évaluation numérique à partir des données suivantes:

$$l = 50 \text{ m}; \; w_{0max} = 0,5 \text{ m}.$$

Le câble est fait en acier. La surface de sa section transversale est égale à $F = 0,6$ cm^2. Le module d'élasticité réduit du câble (cf. le problème 170) est égal à $E = 8 \cdot 10^5$ kgf/cm^2. Le poids par unité de longueur du fil q_f est une fois et demie plus grand que celui du câble q_c.

14. Comment trouver la distribution des contraintes entre les rivets I, II, III, IV de la rivure longitudinale représentée sur la fig. 13 si les résultats de l'expérience préliminaire suivante sont connus? Trois tôles d'épaisseurs h_1, h_2, h_1 et de largeur b, reliées par un seul rivet, sont soumises à des essais de traction (fig. 14). A l'aide de mesurages exacts, on a établi la variation de la distance entre les points

A (sur la tôle supérieure) et B (sur la tôle du milieu) (fig. 14) en fonction de la force T. Cette relation se présente comme suit:

$$\Delta a \doteq \frac{T}{k},$$

k étant une constante. La base de mesurages a a été choisie suffisam-

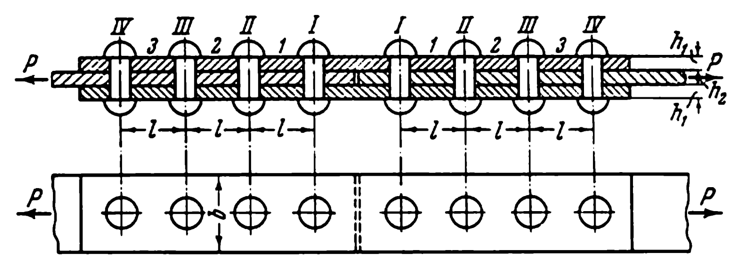


Fig. 13

ment grande pour assurer que les contraintes dans les sections A et B puissent être considérées comme uniformément distribuées.

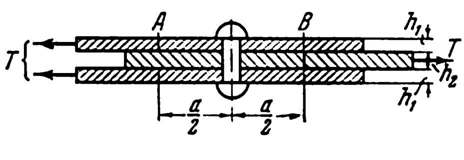


Fig. 14

15. Généraliser la solution du problème précédent pour l'étendre au cas de n'importe quel nombre de rivets n.

16. Une vis et un écrou (fig. 15) sont soumis à la traction par des forces P. Etablir la loi de distribution des contraintes normales le

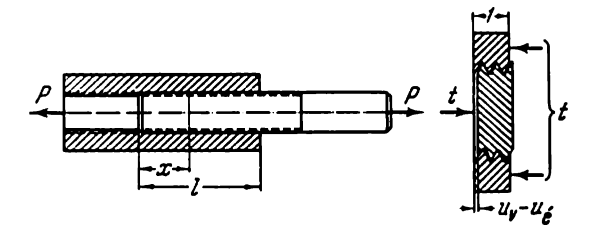


Fig. 15

long de la vis et de l'écrou (en fonction de x) si l'on sait que la contrainte exercée sur chaque spirale de la vis est proportionnelle au déplacement, l'un par rapport à l'autre, de la vis et de l'écrou $t = k(u_v - u_é)$; t est la contrainte exercée sur la surface taraudée

par unité de longueur; k, coefficient établi expérimentalement; $u_v - u_é$, déplacement, l'un par rapport à l'autre, de la vis et de l'écrou le long de l'axe, ce déplacement étant dû à la défomation du filetage (voir dessin 15).

17. Une vis portant un écrou (fig. 16) est soumise à la traction par des forces P. Avec les conditions du problème précédent, établir la loi de distribution des contraintes normales et des contraintes exercées sur le filetage le long de la vis et de l'écrou.

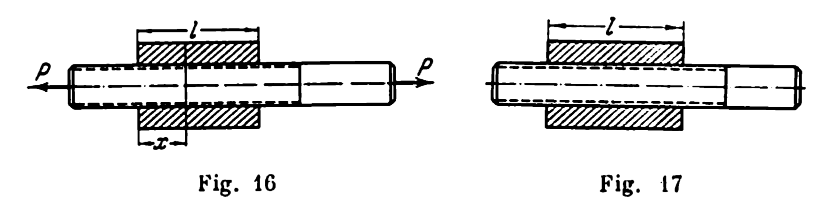


Fig. 16 Fig. 17

18. Autour d'une vis (fig. 17) on serre un écrou doté d'un pas du filet plus petit que celui de la vis s d'une valeur égale à Δ.

Comment se présente la loi de distribution des contraintes engendrées, dans ces conditions, dans la vis et dans l'écrou et quelles sont

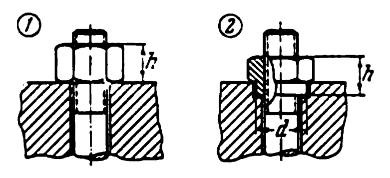


Fig. 18

les contraintes exercées sur le filetage si, comme dans les deux problèmes précédents,

$$t = k\,(u_v - u_é)?$$

19. Lequel des deux types de conception d'un écrou (le premier ou le deuxième, fig. 18) assure des conditions plus favorables de travail des spires de vis?

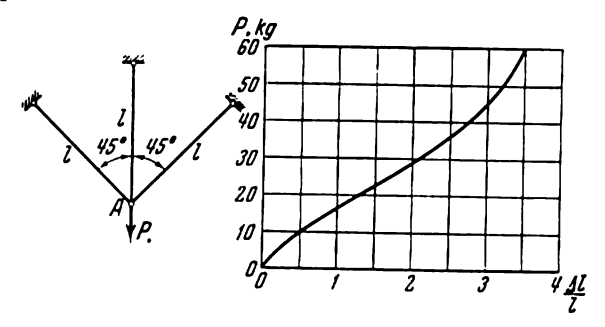


Fig. 19

20. Trois tirants en caoutchouc, identiques, sont sollicités par une force *P*. Etablir, en fonction de la force *P*, le déplacement du point nodal *A* si le diagramme de traction de chaque tirant est donné sous forme de la courbe représentée sur la fig. 19.

21. Un cylindre circulaire à deux couches, en caoutchouc câblé, se trouve sous l'action d'une pression interne *p* (fig. 20). Il

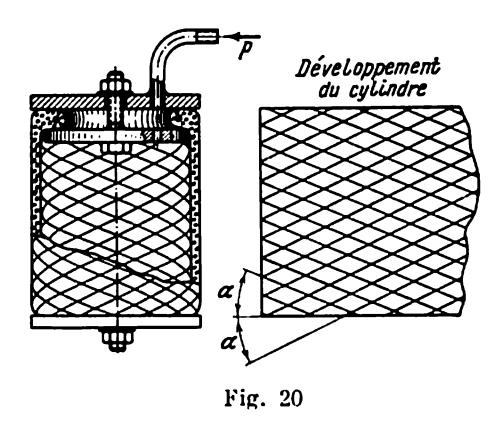


Fig. 20

a été constaté que, en fonction de l'angle de disposition des fils α, le cylindre, se déformant sous l'action d'une pression interne, peut adopter l'une des formes représentées sur la fig. 21. Dans le cas *1*,

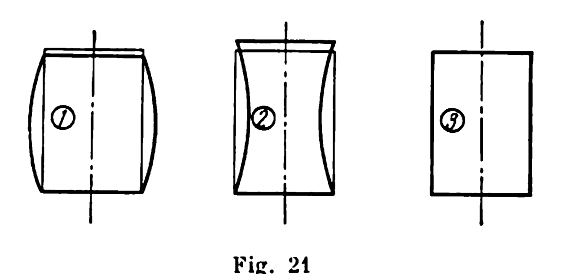


Fig. 21

l'incurvation de la génératrice du cylindre est dirigée vers l'extérieur ; dans le second cas, vers l'intérieur. Dans le troisième cas, sous la même pression, on n'observe pas de déformations notoires et le cylindre conserve sa forme dans une telle mesure que l'on peut considérer les fils comme inextensibles.

A quelles valeurs de l'angle α correspond chacun de ces types de déformations relevés?

22. Un globe aux parois minces, en caoutchouc, se trouve renforcé par une série de fils rigides disposés selon les méridiens (fig. 22).

Il a été établi par expérience que si à l'intérieur du globe on injecte sous pression de l'air, le globe se dilatera au niveau de l'équateur

et se comprimera par rapport à l'axe de rotation pour adopter une forme rappelant une citrouille. En négligeant la rigidité de l'enveloppe en caoutchouc, déterminer le degré d'aplatissement de cette forme.

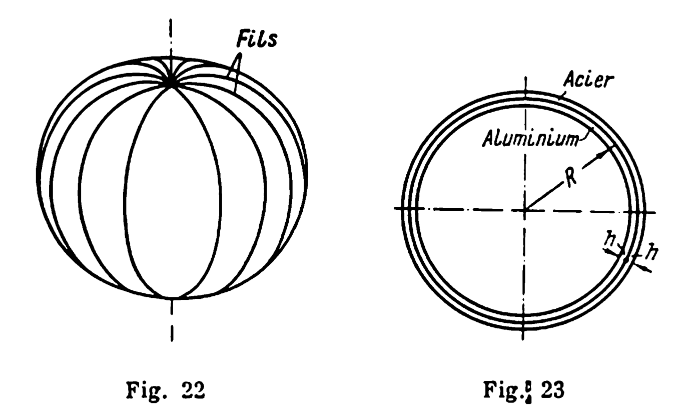


Fig. 22 Fig. 23

23. Un anneau en acier est enfilé sur un autre, en aluminium, avec un serrage déterminé (fig. 23). L'expérience montre que dans certains cas, après un échauffement du système à une température déterminée suivi d'un refroidissement, l'anneau intérieur se détache de l'anneau extérieur.

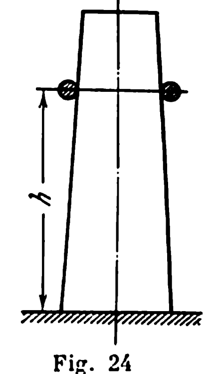


Fig. 24

Etablir sous quelles conditions ce phénomène devient possible. Quelles sont les données nécessaires pour effectuer une évaluation numérique du phénomène en question?

24. Un cône massif, rigide, est revêtu librement d'un anneau mince (fig. 24). Le cône et l'anneau sont soumis simultanément à l'action d'une température variant périodiquement. Comment cela va-t-il se refléter sur l'emplacement de l'anneau le long de l'axe du cône? En d'autres mots, la valeur de h va-t-elle varier avec le temps?

25. Soit une barre absolument rigide et un tube flexible et mince, dont le diamètre interne est inférieur à celui de la barre d'une

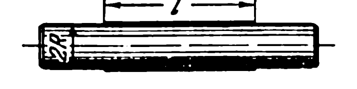


Fig. 25

valeur égale à 2Δ. Le tube est réchauffé et enfilé sur la barre (fig. 25) Lors du refroidissement dans le tube apparaissent des contraintes tangentielles qui peuvent être accompagnées de contraintes axiales si on a affaire au frottement.

Déterminer la valeur et le caractère des contraintes qui se développent dans le tube.

26. Modifions en les compliquant les données du problème précédent. Déterminer la force P qu'il faut appliquer au tube pour l'enlever de par la barre (fig. 26). Considérer deux variantes : a) la force P est une force de compression ; b) la force P est une force de traction.

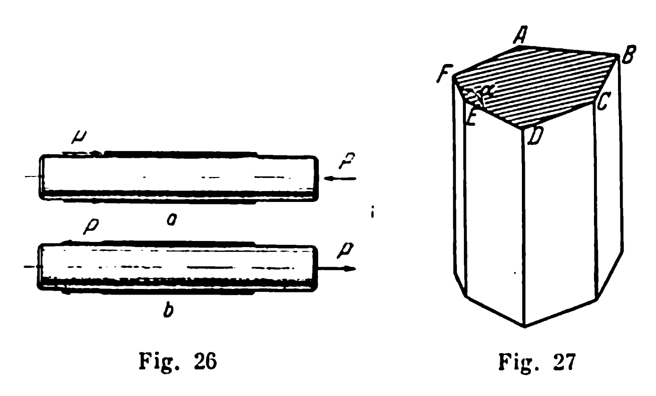


Fig. 26 Fig. 27

27. Montrer que lors de la torsion d'une poutre prismatique ayant une section transversale en forme de polygône, les contraintes tangentielles dans n'importe lequel des angles extérieurs A, B, C, ... (fig. 27) sont nulles.

28. Lors de la torsion d'une poutre droite et ronde dans ses sections transversales apparaissent des contraintes tangentielles τ dont

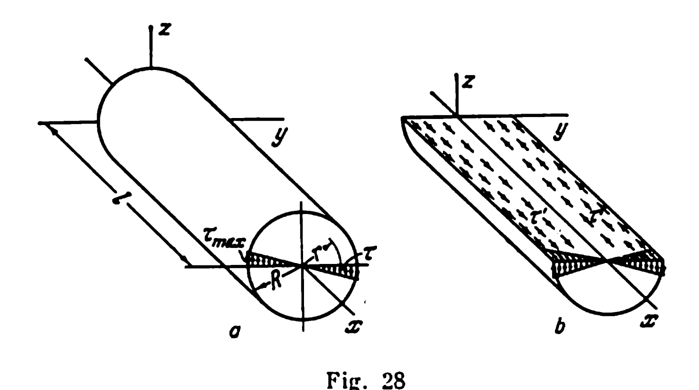


Fig. 28

la valeur est proportionnelle à la distance r comptée à partir de l'axe de la poutre (fig. 28). Selon la loi de la parité des contraintes tangentielles, dans le plan de la section axiale de la poutre xy apparaissent des contraintes tangentielles τ' absolument identiques aux premières et qui engendrent un moment résultant par rapport à l'axe z.

La partie amputée de la poutre devant rester en équilibre, qu'est-ce qui équilibre le moment en question?

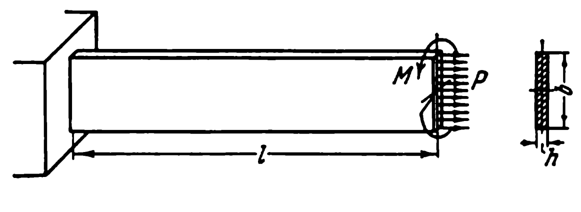


Fig. 29

29. Comment la rigidité en torsion d'une bandelette mince dépend-elle de la force de traction axiale P (fig. 29) agissant simultanément avec un moment de torsion?

30. Un rouleau rond (fig. 30) placé dans un tube s'y trouve retenu par les forces de frottement. La pression de contact du serrage engen-

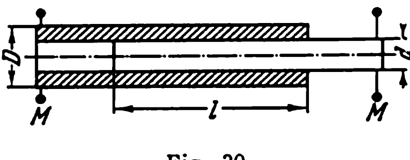


Fig. 30

drée par ces forces de frottement, ainsi que le coefficient de frottement, peuvent être considérés, avec un degré de précision suffisant, comme constants pour toute la zone de contact. Sur le rouleau et sur le tube, on applique des moments égaux en valeur, mais dirigés dans des sens opposés M. Si $M > M_0$, le rouleau bouge dans le tube.

L'on demande de dessiner les diagrammes des moments de torsion pour le tube et le rouleau pour $M < M_0$.

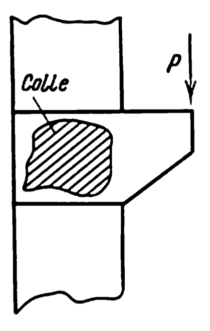


Fig. 31

31. Comment évaluer la résistance d'un assemblage collé d'un gousset rigide reposant sur une assise également rigide, la tache d'encollage étant de forme quelconque (fig. 31)?

La forme de la tache est maintenant connue. La contrainte tangentielle engendrée dans la couche de la colle est proportionnelle au déplacement local des éléments collés, l'un par rapport à l'autre. La valeur de la contrainte limite de rupture de la colle est supposée connue.

32. Dans la section transversale d'une poutre tordue (fig. 32) on trace une courbe fermée quelconque. Les contraintes tangentielles dans chaque point de la courbe sont décomposées en composantes

normale (τ_n) et tangentielle (τ_s) par rapport à la courbe tracée. Comme il s'agit d'une torsion non obstruée, il n'y aura pas de contraintes normales dans la section. Démontrer que, indépendamment de la

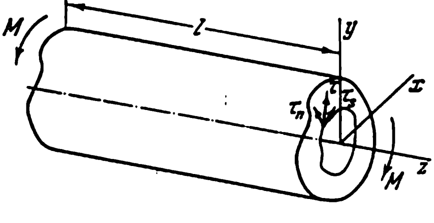


Fig. 32

forme de la poutre, ainsi que de celle de la courbe tracée dans la section, les formules suivantes restent valables:

1) $\int_s \tau_n \, ds = 0$;

2) $\int_s \tau_s \, ds = 2GF_s\theta$,

où ds est l'élément d'arc du contour, G, module de cisaillement, F_s, surface délimitée par la courbe, θ, angle de torsion par unité de longueur de la poutre. (L'intégration s'étend sur tout le contour de la courbe fermée.)

33. Lors de la torsion d'une bande rectangulaire étroite, dans les sections transversales apparaissent, comme on sait, des contraintes

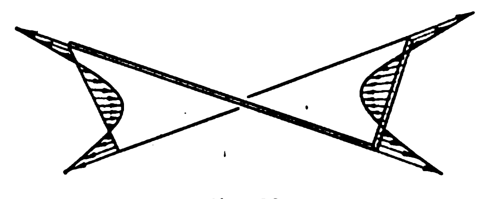


Fig. 33

normales secondaires. Sur les bords de la bande, ce sont des contraintes de traction tandis qu'au milieu, des contraintes de compression (fig. 33).

Dans le cas d'un profilé de forme quelconque à parois minces, de quelles caractéristiques dépendent ces contraintes et comment?

34. Une tige cylindrique est tordue par des moments m uniformément répartis sur sa surface et équilibrés par un moment M appliqué sur le bout (fig. 34, a). Sous une telle sollicitation, outre les

contraintes habituelles τ agissant dans les sections transversales, dans les sections cylindriques et axiales de la tige apparaîtront encore des contraintes tangentielles t.

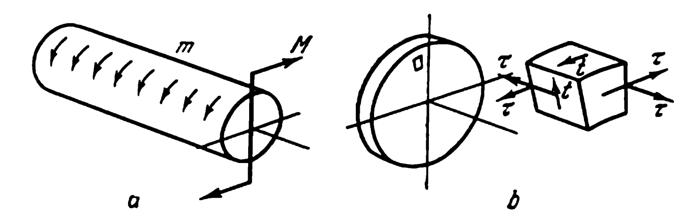


Fig. 34

Déterminer comment ces contraintes sont réparties dans le volume de la tige. Donner une évaluation comparative des valeurs de τ et t.

35. Les contraintes tangentielles dans une section transversale d'une poutre en torsion pure peuvent être décomposées en deux com-

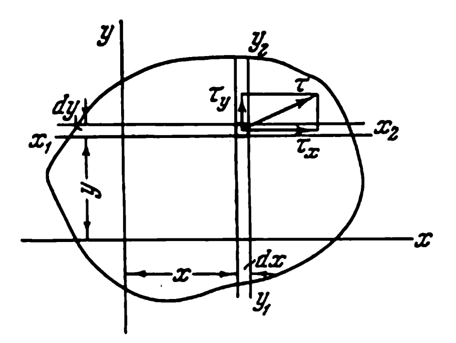


Fig. 35

posantes τ_x et τ_y (fig. 35). Le moment de torsion dans la section est, de toute évidence, déterminé par l'expression suivante:

$$M_t = \int_x \int_y \tau_x y \, dx \, dy - \int_x \int_y \tau_y x \, dx \, dy.$$

Montrer que, indépendamment de la forme de la section, les formules suivantes restent valables:

$$\int_x \int_y \tau_x y \, dx \, dy = \frac{M_t}{2}, \quad -\int_x \int_y \tau_y x \, dx \, dy = \frac{M_t}{2}.$$

II. PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS. FLEXION

36. Sans recourir à l'intégration, trouver le moment d'inertie centrifuge J_{xy} d'un triangle rectangle par rapport aux axes centraux parallèles aux côtés formant l'angle droit (fig. 36).

37. Trouver le lieu géométrique des points pour lesquels les moments d'inertie polaires d'une figure plane restent constants.

38. Démontrer la thèse suivante:

Si, dans un ensemble d'axes passant par un point quelconque, on peut indiquer plus d'une paire d'axes principaux non coïncidants, il est permis d'affirmer que, d'une manière générale, tous les axes passant par ce point sont principaux.

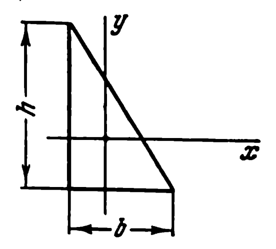


Fig. 36

39. Trouver dans une section plane un point possédant cette propriété-ci que tous les axes passant par lui sont principaux.

40. Etudions une poutre droite fléchissant sous l'action de deux moments M (fig. 37).

En flexion pure, il n'y aura, comme on sait, aucune contrainte dans la couche neutre OO. Par conséquent, dans cette couche il n'y aura pas d'action mutuelle des forces entre les parties supérieure et

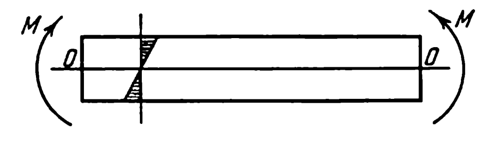


Fig. 37

inférieure de la poutre. Ainsi, par la section OO, on peut diviser la poutre en deux autres, plus minces, et cela ne doit aucunement se refléter sur le fonctionnement du système.

Par ailleurs, la légitimité d'une telle façon de procéder suscite des doutes. En effet, deux poutres réunies ensemble et soumises

à une sollicitation par des moments M, s'incurveront d'une façon telle que sur la surface de contact aura lieu un glissement longitudinal (fig. 38) et le diagramme des contraintes dans les sections normales des deux poutres aura une forme tout à fait autre que celle à laquelle on avait eu affaire dans le cas d'une poutre entière. Alors

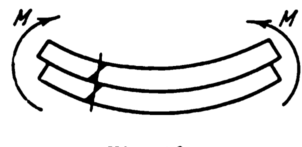


Fig. 38

comment? Est-il possible ou non de diviser la poutre en deux de telle façon que cela ne se reflète pas sur son fonctionnement?

41. Comment dégrossir une grume ronde de façon à en faire une barre de section transversale rectangulaire qui posséderait une résistance en flexion la plus grande (fig. 39)?

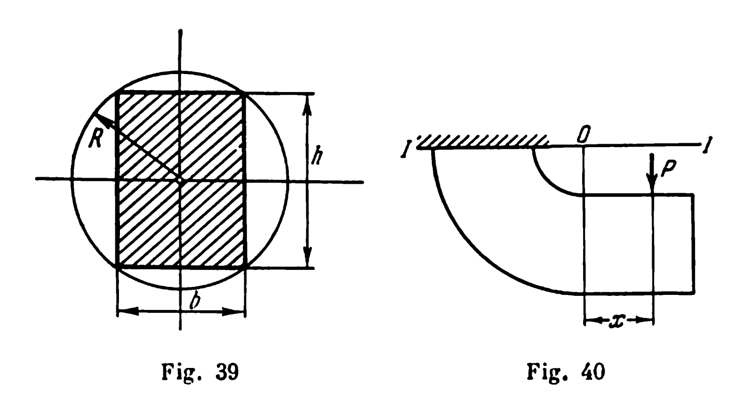


Fig. 39 Fig. 40

42. Il est connu que lors de la flexion d'une poutre de courbure longue, l'axe neutre ne passe pas par le centre de gravité et se trouve quelque peu dévié vers le centre de la courbure.

Si l'on soumet la poutre non seulement à la flexion, mais encore et simultanément à la traction, l'axe neutre du diagramme total des contraintes pourra, dans le cas le plus général, se déplacer d'une valeur quelconque en fonction de la valeur de la force de traction ou de la force de compression.

A quelle distance x à partir du centre O de la courbure d'une poutre ronde faut-il appliquer une force P (fig. 40) pour assurer que l'axe neutre du diagramme total des contraintes passe, dans la coupe I — I, par le centre de gravité de la section?

43. On sait que lorsqu'on applique un moment externe M (fig. 41) sur une poutre droite de rigidité constante, cette dernière

s'incurve en épousant la forme d'une parabole carrée

$$y = \frac{M}{EJ} \frac{x^2}{2}. \qquad (1)$$

D'autre part, on connaît l'expression suivante:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{fl}}{EJ}. \qquad (2)$$

A supposer que M_{fl} et EJ sont des valeurs constantes, ce qui, admettons, est le cas ici, $1/\rho$ sera aussi une grandeur constante.



Fig. 41

Pourtant, c'est seulement un arc de cercle et non une parabole qui possède une courbure constante. Comment donc s'incurvera la poutre? Suivant l'arc de la parabole ou selon un cercle?

44. Quelle déflexion préalable y doit-on imprimer à des skis pour que, lors du glissement sur une piste droite et dure, le poids du skieur

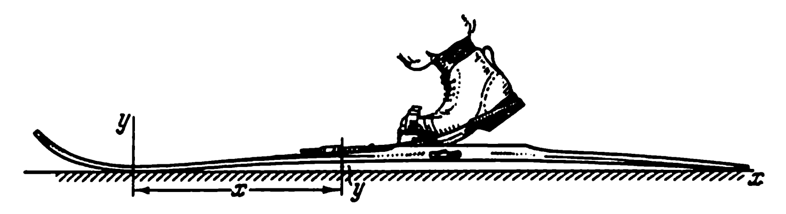


Fig. 42

se répartisse uniformément sur la longueur de la surface de glissement (fig. 42)?

45. A quelle distance x à partir de l'extrémité d'une barre il faut appliquer une force P pour que le déplacement du point A soit nul (fig. 43)?

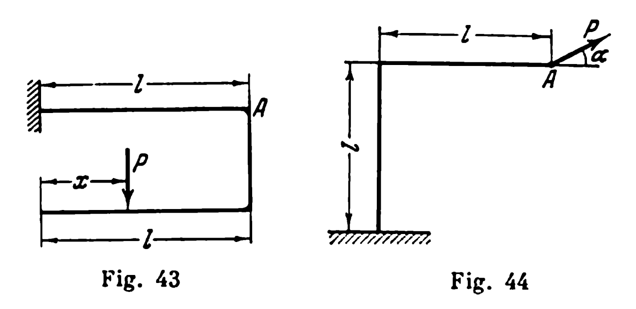


Fig. 43 Fig. 44

46. Une poutre brisée (fig. 44), encastrée à l'une de ses extrémités, est sollicitée à l'autre par une force P. Choisir un angle d'inclinaison α de la ligne d'action de la force tel que le déplacement du point A se fasse suivant la direction de la force P.

47. Où se déplacera le point A (fig. 45)? En haut, en bas, à droite, à gauche?

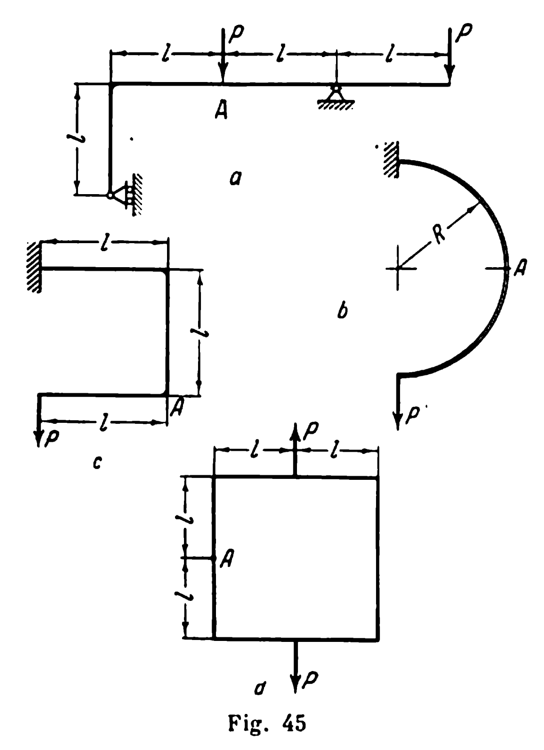


Fig. 45

48. Tracer la forme de la ligne élastique pour les systèmes suivants (fig. 46).

49. Le portique représenté sur la fig. 47 est sollicité par une force P. L'on demande si la barre AB est étirée ou comprimée.

50. Expérimentalement, on a établi la forme de la ligne élastique d'une barre flexible fortement recourbée et on a déterminé la valeur de la force P (fig. 48). Quelle est la façon la plus simple de trouver les réactions des appuis?

51. Un appareil massif de poids $2P$ est installé dans un châssis circulaire (fig. 49). Choisir la dimension a de telle façon que la rigidité de la barre de suspension soit maximale. La rigidité en flexion est la même pour l'anneau et pour les barres.

52. Lequel des trois portiques représentés sur la fig. 50 est le plus rigide, c'est-à-dire assure le plus petit déplacement δ sous l'action d'une force P? Les dimensions des sections sont les mêmes.

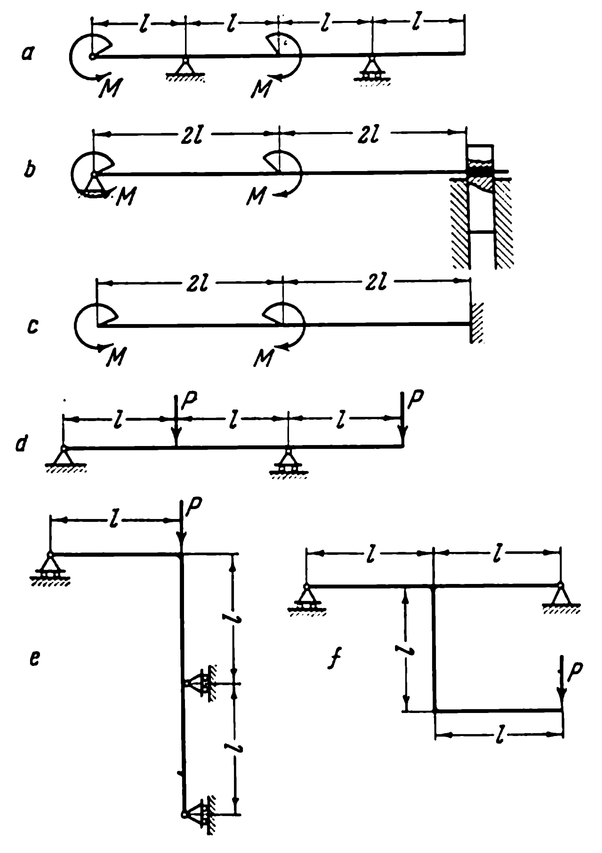
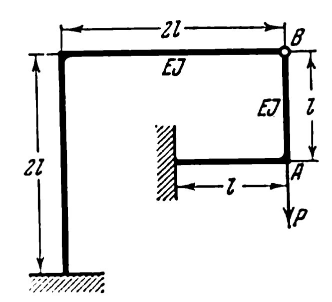
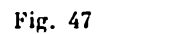


Fig. 46




Fig. 47

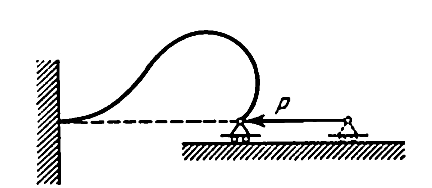


Fig. 48

53. Imaginez que vous tenez en mains un piston ayant la forme d'un anneau (fig. 51, *a*). Essayez de le comprimer suivant son diamè-

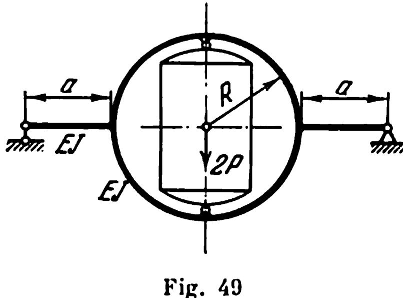


Fig. 49

tre et vous remarquerez que la déformabilité de l'anneau varie en fonction de ceci par quel diamètre se fait la compression. Simplifions le problème en présentant le nœud A de fermeture sous forme

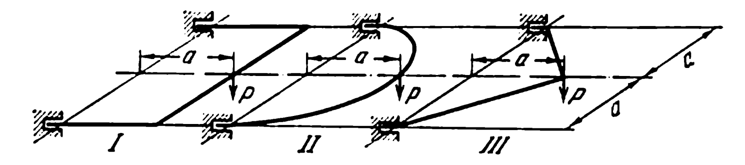


Fig. 50

de charnière. Trouver la valeur de l'angle α (fig. 51, *b*) sous lequel le déplacement des points BC, l'un par rapport à l'autre, sera le plus petit, la force demeurant constante.

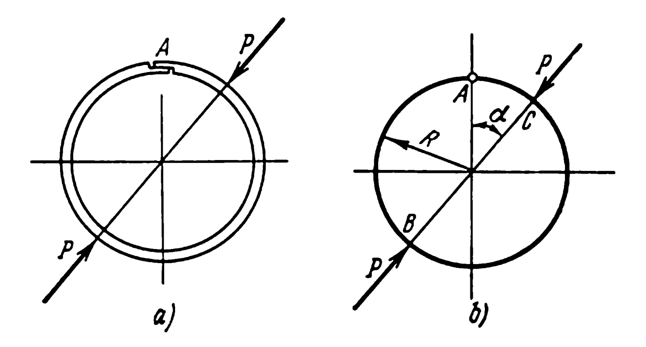


Fig. 51

54. Un ressort à boudin cylindrique encastré à l'une de ses extrémités est sollicité à l'autre par une force transversale P

(fig. 52). Déterminer le déplacement vertical du point d'application de la force. L'angle d'élévation des spires peut être considéré comme étant petit.

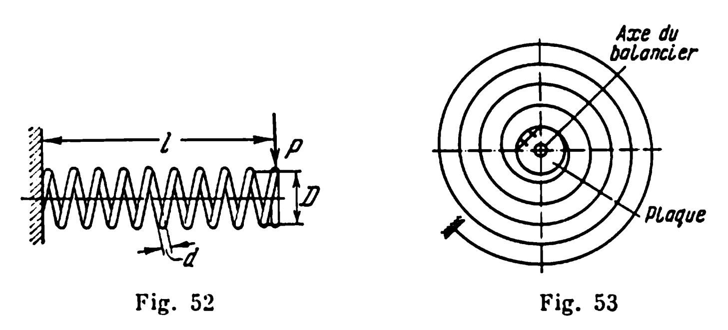


Fig. 52 Fig. 53

55. Le ressort du balancier des montres-bracelets et des montres de poche se présente comme une bande plate en spirale (fig. 53). Le bout externe de la bande est encastré tandis que l'autre, interne, est attaché rigidement à une plaque située sur l'axe du balancier. Lorsque le balancier oscille, la plaque se retourne et la bande du ressort fléchit. Dans le cas général, cette flexion ne sera pas une flexion pure, et dans les sections du ressort peuvent apparaître des efforts aussi bien transversaux que longitudinaux. La présence de ces efforts n'est pas à désirer pour le fonctionnement du mécanisme d'horlogerie. La présence de ces efforts provoque le gauchissement de l'axe du balancier, augmente le frottement dans les appuis et réduit la précision de la montre.

Etablir les conditions géométriques auxquelles doit obéir le ressort pour que, sous un virement minime de la plaque (fig. 53), sa flexion soit une flexion pure.

56. Un ressort plat composé de deux tôles de longueur $2l$ et $3l$ respectivement est sollicité à son extrémité par une force P (fig. 54, a).

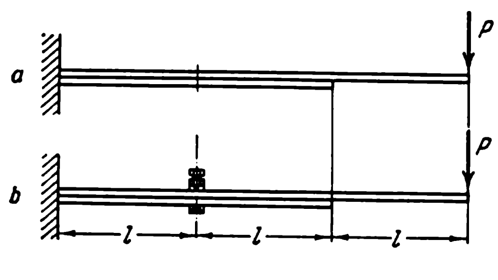


Fig. 54

Déterminer la variation de l'uncurvation et les contraintes dans le ressort si ses tôles sont reliées à une distance l à partir du lieu d'encastrement (fig. 54, b). Cette liaison est supposée compacte quoi-

que permettant des déplacements longitudinaux libres pour les tôles.

57. Un ressort composé de trois tôles de longueur $6l$, $4l$ et $2l$ (fig. 55) est sollicité par des forces P. Déterminer l'aplatissement

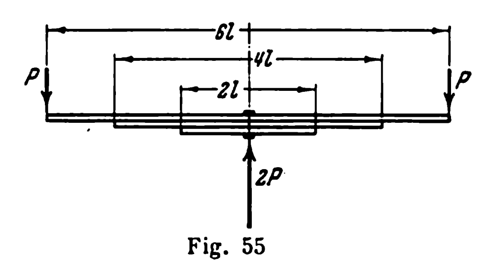


Fig. 55

du ressort et trouver les contraintes engendrées dans les tôles par cette sollicitation. Ne pas tenir compte du frottement.

58. Un ressort plat de section constante (fig. 56) est porté, en flexion, sur un calibre rigide dont le profil $y = y(x)$ est donné.

Quand on considère les déflexions du ressort, avant tout se pose une question concernant le caractère de l'adhérence du ressort au calibre. Ici, deux cas principaux sont à envisager:

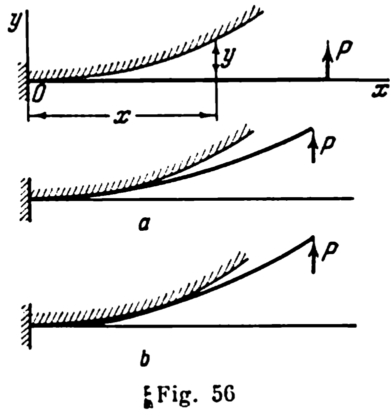


Fig. 56

1) sur l'intervalle entre le lieu d'encastrement et un certain point le ressort adhère compactement au calibre (fig. 56, *a*);

2) le ressort touche le calibre en un seul point (fig. 56, *b*).

En supposant que la fonction $y(x)$ est monotone elle-même, que le sont également ses dérivées les plus immédiates; en supposant, en outre, que y est petit par rapport à x, établir dans quel cas aura lieu l'un ou l'autre des types d'adhérence mentionnés.

59. Une poutre droite, homogène, de longueur l et de poids P repose sur une assise rigide (fig. 57). Déterminer la valeur des con-

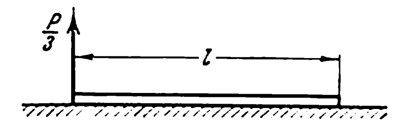


Fig. 57

traintes engendrées dans la poutre si l'on applique sur son extrémité une force $P/3$.

60. Une poutre flexible est placée compactement mais sans frottement dans un trou foré dans une assise rigide (fig. 58). Intuitivement, on a l'impression que si on la charge d'une force P, la poutre glissera de l'encastrement. Mais ... on ne comprend pas: sous l'effet de

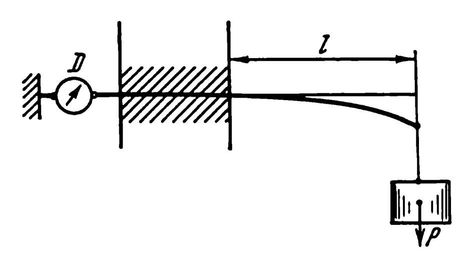


Fig. 58

quelles forces? Que montrera le dynamomètre D si les forces de frottement sont absentes?

61. Un cylindre rigide de diamètre D (fig. 59) est revêtu d'un anneau flexible, fendu, dont le diamètre intérieur est égal à $D - \Delta$, c'est-à-dire à une dimension inférieure de Δ par rapport au diamètre du cylindre. Lors de l'ajustage, l'anneau tendra, manifestement, à se recourber. Déterminer la loi de variation du moment fléchissant sur le pourtour de l'anneau et montrer le caractère de l'action mutuelle des forces entre l'anneau et le cylindre.

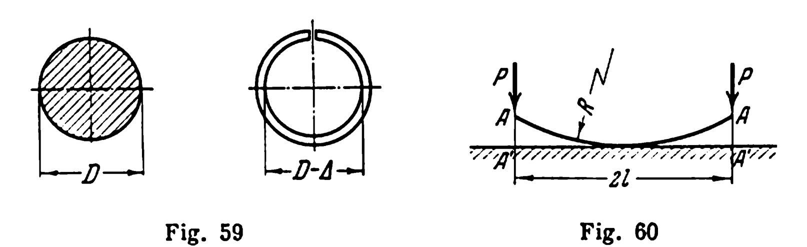


Fig. 59 Fig. 60

62. Un ressort flexible, en pente douce, recourbé suivant l'arc d'un cercle de rayon R, est comprimé sur une surface rigide par deux forces P (fig. 60). Pour quelles valeurs des forces P les points A se trouveront collés contre la surface?

63. Deux poutres de profil en forme d'auge sont éclissées par l'intermédiaire de plaques étroites possédant une grande rigidité et soudées en disposition transversale le long des ailes inférieures et supérieures. La poutre ainsi composée est encastrée à l'une de ses extrémités tandis qu'à l'autre elle est sollicitée par des forces P (fig. 61).

Quelles seront les contraintes supportées par ces plaques transversales?

64. Déterminer la répartition des contraintes tangentielles dans un profil triangulaire fermé, à parois minces, soumis à une flexion transversale (fig. 62).

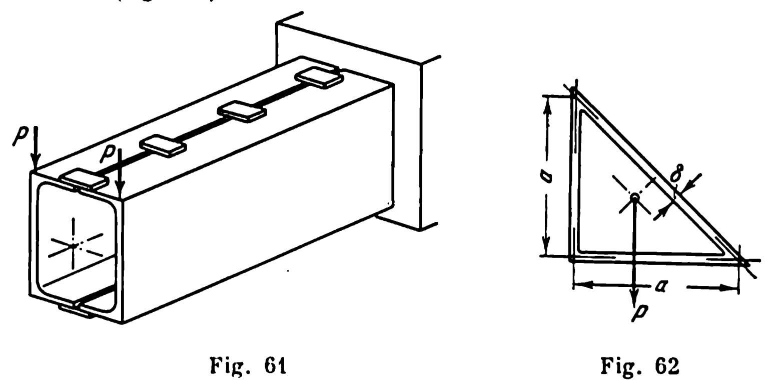


Fig. 61 Fig. 62

65. Déterminer la loi de répartition des contraintes tangentielles dans les sections transversales d'une barre d'épaisseur variable h (fig. 63).

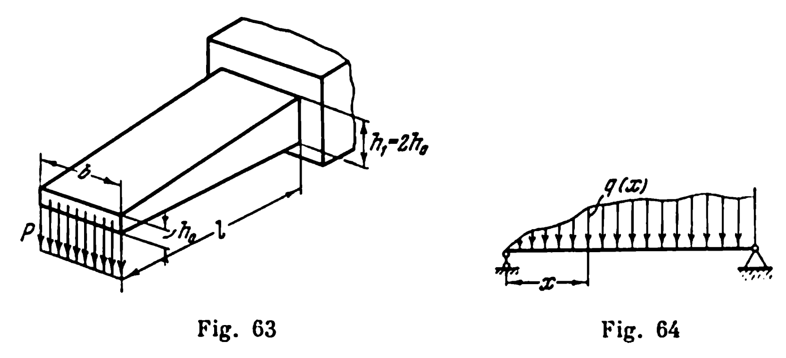


Fig. 63 Fig. 64

66. Peut-on choisir la loi de distribution d'une sollicitation $q(x)$, non identiquement nulle, telle que la poutre de la fig. 64 puisse rester rectiligne?

67. Une poutre continue assez longue, faite d'un grand nombre de portées égales, est sollicitée à l'extrémité gauche (sur le premier

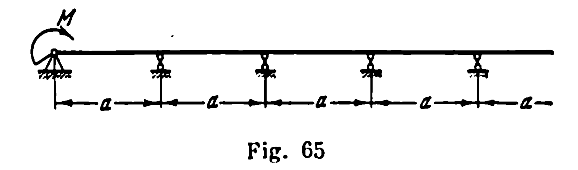


Fig. 65

appui) par un moment M (fig. 65). Déterminer le moment fléchissant ainsi que l'angle de rotation de la poutre sur le n-ième appui.

68. Résoudre le problème précédent pour le cas d'un nombre déterminé n d'appuis (fig. 66).

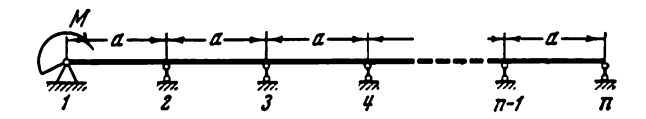


Fig. 66

69. En se servant des équations des déplacements, lever l'hyperstaticité du système suivant (fig. 67).

Lors du chargement du portique par une force P, le point A situé sur le contour du portique va glisser avec frottement sur une surface horizontale rigide. Coefficient de frottement f. La rigidité de tous les éléments du portique est constante et égale à EJ.

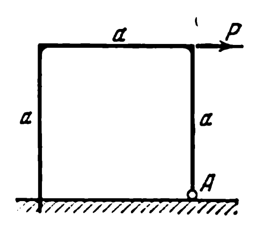


Fig. 67

70. Un système géométriquement invariable fait de barres aux liaisons articulées porte le nom de poutre à treillis. Les barres d'une telle poutre a treillis sont soumises à la traction ou à la compression.

En réalité, dans les structures habituelles, les barres d'une poutre à treillis sont dotées de liaisons, non pas articulées, mais bien rigides, réalisées à l'aide de la soudure ou du rivetage. Est-il permis dans ce cas de calculer une poutre à treillis en se basant sur la même supposition selon laquelle les barres sont soumises à la traction-compression et de négliger dans les calculs la flexion des barres? En effet, si les barres sont liées entre elles rigidement, la poutre à treillis ne cesse-t-elle pas, à proprement parler, d'être poutre à treillis pour se transformer en un portique!

71. Le déterminant d'un système d'équations canoniques (équations des déplacements dans la méthode des forces):

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}\delta_{12}\delta_{13} \dots \delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22}\delta_{23} \dots \delta_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \delta_{n1}\delta_{n2}\delta_{n3} \dots \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

peut-il être égal à zéro?

72. Déterminer l'affaissement d'un ressort sectionné (fig. 68), comprimé par des forces P, en partant de cette supposition-ci que les cloisons entre les anneaux disposent d'une rigidité suffisamment grande par rapport aux autres parties du ressort.

Les dimensions du ressort sont données sur la fig. 68.

73. Montrer que pour tout contour fermé d'un portique plan de rigidité constante l'aire de l'épure des moments est égale à zéro,

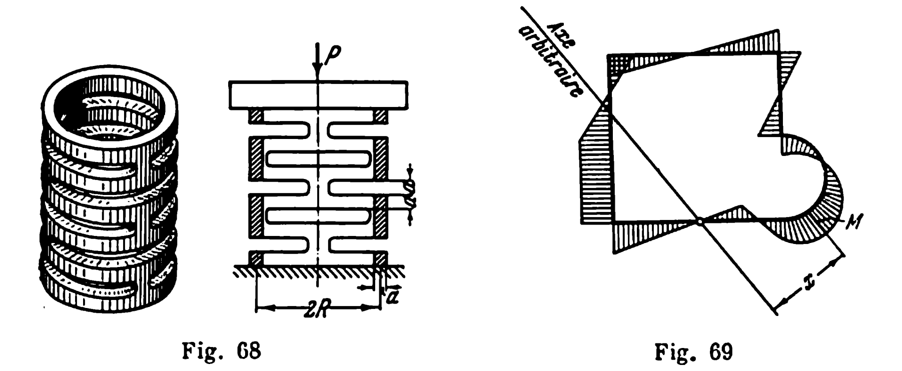


Fig. 68

Fig. 69

c'est-à-dire

$$\int_s M_{fl}\, ds = 0.$$

74. Montrer que pour tout contour fermé d'un portique plan, doté d'une charnière, à condition que la rigidité soit constante,

$$\int_s M_{fl} x \, ds = 0,$$

où M est le moment fléchissant, x, distance jusqu'à n'importe quel axe passant par la charnière (fig. 69).

L'intégration s'étend sur tout le contour du portique.

Fig. 70

75. Montrer que l'aire délimitée par le contour d'un châssis plan, inextensible, en forme d'anneau, reste inchangée, c'est-à-dire égale à πR^2, lorsque le châssis se trouve en flexion par un système plan de forces, les déplacements étant petits (fig. 70).

76. Une barre droite en bois, de section transversale rectangulaire, nage à la surface de l'eau (fig. 71).

Déterminer les contraintes engendrées dans la barre, ainsi que le déplacement du point d'application de la force P, si

$$P = 50 \text{ kgf}, \qquad l = 10 \text{ m},$$

$$b = 20 \text{ cm}, \qquad h = 10 \text{ cm}.$$

Le bois est un pin de poids spécifique 0,6 gf/cm^3 avec un module d'élasticité $E \approx 10^5$ kgf/cm^2.

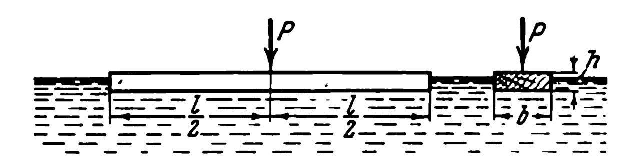


Fig. 71

77. Deux plaques d'égales épaisseur h et largeur b sont collées à recouvrement (fig. 72). Les plaques sont soumises à une flexion dans le plan du dessin.

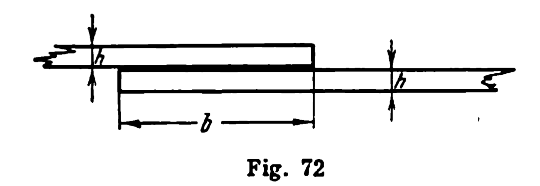


Fig. 72

Déterminer la loi de transmission des efforts d'une plaque à une autre en supposant élastique la couche de la colle. L'épaisseur de la colle est égale à δ, ses modules d'élasticité E_c et G_c.

78. Déterminer les efforts agissant dans les rayons d'une roue de vélo ainsi que les contraintes engendrées dans la jante si l'on applique sur l'axe de la roue une force égale à P (fig. 73).

Le sol sur lequel s'appuie la roue peut être considéré comme rigide. Le nombre de rayons n est à tel point grand qu'il est permis de considérer ces derniers non pas comme des tiges isolées, mais comme formant un milieu continu.

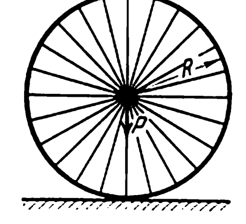


Fig. 73

Effectuer une estimation numérique à partir des données suivantes : $P = 40$ kgf ; rayon de la roue $R = 31$ cm ; moment d'inertie de la section de la jante $J = 0{,}3$ cm^4 ; nombre de rayons $n = 36$; diamètre des rayons $d = 2$ mm. La jante et les rayons sont faits en acier, $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm^2.

79. Dans différents régulateurs de la température on emploie assez souvent des pièces dites éléments bimétalliques. Un élément bimétallique se présente sous forme de deux plaques métalliques, reliées rigidement, ayant des coefficients de dilatation thermique α_1 et α_2 différents (fig. 74). Sous l'effet de l'échauffement, la plaque bimétallique s'incurve à cause de l'allongement différent de ses composantes. Si l'on encastre rigidement une des extrémités de la plaque, l'autre se déplacera d'une certaine valeur. Les déplacements ainsi obtenus sont employés comme source de mouvement et d'efforts mécaniques nécessaires.

Etablir comment varie la courbure de la plaque en fonction de ses dimensions géométriques et de la température d'échauffement.

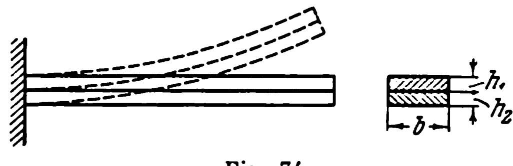


Fig. 74

80. Un anneau bimétallique ayant des dimensions indiquées sur la fig. 75 est échauffé à une température t. Déterminer la valeur de l'angle φ dont se retournera la section de l'anneau en supposant invariable la forme de cette section. Les coefficients d'allongement thermique des parties composantes de l'anneau sont α_1 et α_2.

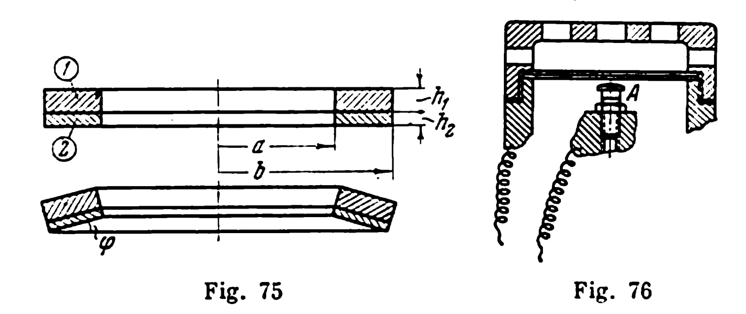


Fig. 75 Fig. 76

81. On a fait le projet d'un régulateur de température d'un thermostat dans lequel, en qualité d'élément sensible, est employée une plaque bimétallique fixée comme c'est indiqué à la fig. 76. Sous l'augmentation de la température, suivant le dessein de l'ingénieur d'études, la plaque commence à s'incurver. Lorsque la température atteindra une valeur donnée, le contact A se fermera et un relais de commande régularisant l'échauffement du thermostat se mettra en marche. Un système pareil va-t-il travailler?

82. Montrer qu'un châssis bimétallique plan, fermé, de section constante, indépendamment de la forme du contour, ne change pas de courbure sous un échauffement uniforme (fig. 77).

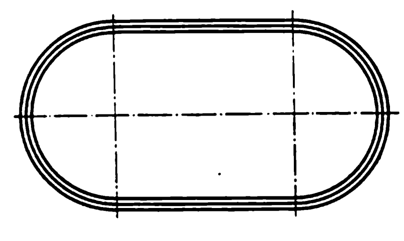


Fig. 77

83. Trois barres ayant une rigidité en flexion identique, la forme de leurs sections transversales étant différente (fig. 78), sont soumises à une flexion dans le plan vertical par des moments M. Dessiner pour

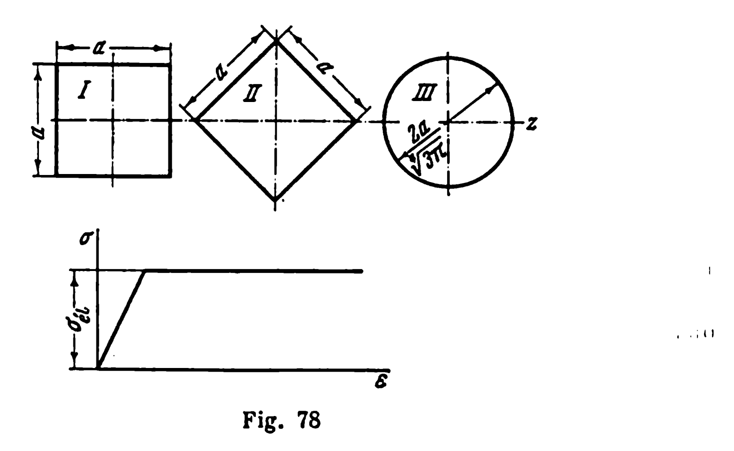


Fig. 78

chaque barre la courbe de dépendance de la variation de la courbure par rapport aux moments M si le diagramme de traction du matériau peut être représenté schématiquement par une ligne brisée (fig. 78).

$$\frac{\sigma_{él}}{E} = 0{,}002.$$

84. Une poutre de section transversale rectangulaire (fig. 79) est incurvée dans le plan vertical de telle façon que dans sa section

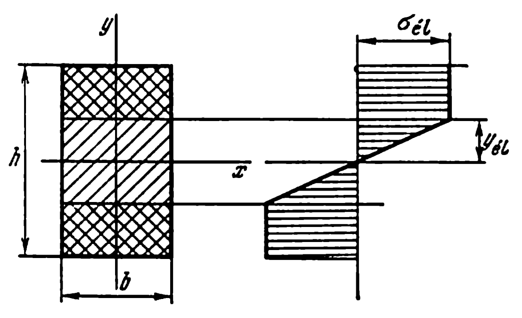


Fig. 79

apparaissent des déformations plastiques. Le diagramme de test du matériau correspond, comme dans le problème précédent, aux propriétés de la plasticité idéale.

Déterminer quelle est la rigidité en flexion dont se trouve dotée la poutre dans le second plan principal si le moment M_y est appliqué pour un moment M_x constant.

85. Un lot de rondelles minces et rondes (fig. 80) sont enfilées sur un boulon fait dans le même matériau que les rondelles et serrées par l'intermédiaire d'un écrou avec une force P. La barre ainsi obtenue

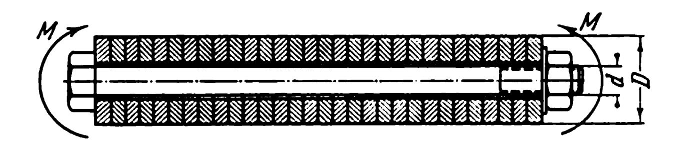


Fig. 80

est soumise à une flexion par deux moments M. Déterminer la variation de la courbure de la barre ainsi que les contraintes engendrées en elle sous la condition que la valeur du moment M est suffisante pour ouvrir les surfaces de contact sur le côté inférieur de la barre. Le matériau obéit à la loi de Hooke. Le diamètre de l'écrou d peut être considéré comme égal au diamètre intérieur des rondelles.

III. ÉTAT DE CONTRAINTE COMPOSÉ ET THÉORIES DE RÉSISTANCE

86. Un cylindre de diamètres intérieur d_1 et extérieur d_2 est sollicité par une pression uniformément répartie : a) sur les extrémités

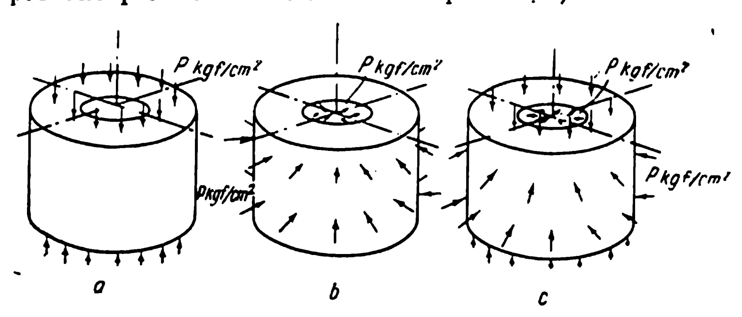


Fig. 81

frontales ; b) sur les surfaces intérieure et extérieure ; c) sur toute la surface (fig. 81).

Déterminer la variation du diamètre intérieur ainsi que celle du volume de la cavité intérieure dans chacune de ces variantes de sollicitation indiquées.

87. Combien de constantes élastiques est-il indispensable d'introduire pour donner une caractéristique exhaustive des propriétés élastiques du bois?

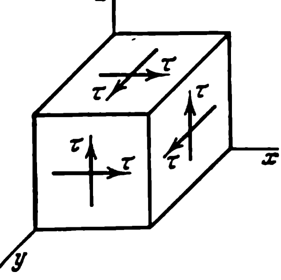


Fig. 82

88. Déterminer les contraintes principales dans l'état de contrainte représenté sur la fig. 82.

89. Pour le cas général d'état de contrainte (fig. 83), montrer :

1) Si pour deux surfaces réciproquement perpendiculaires (par exemple, les surfaces perpendiculaires aux axes x et y) la condition suivante est observée :

$$\tau_{yx} = k\sigma_x, \quad \tau_{yz} = k\tau_{xz}, \quad \sigma_y = k_{xy}, \tag{1}$$

k étant une certaine constante, alors l'état de contrainte ne pourra être triaxial (il sera soit biaxial soit monoaxial).

2) Si, outre la condition (1), est observée encore la condition suivante:

$$\tau_{zx} = n\sigma_x, \quad \sigma_z = n\tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = n\tau_{xy}, \tag{2}$$

alors l'état de contrainte est monoaxial.

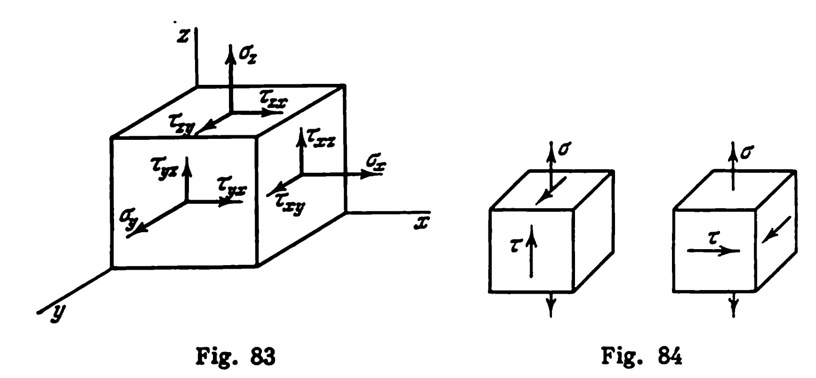


Fig. 83 Fig. 84

90. Sans déterminer les contraintes principales et sans calculer $\sigma_{éq}$, dire lequel des deux états de contrainte (fig. 84) est le plus dangereux du point de vue de la théorie énergétique de résistance.

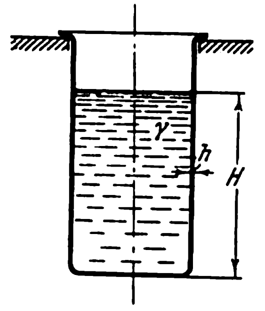


Fig. 85

91. Conformément à la théorie des contraintes tangentielles maximales, donner le diagramme des $\sigma_{éq}$ le long de la génératrice d'un récipient cylindrique (fig. 85) rempli jusqu'à la hauteur H d'un liquide ayant un poids spécifique égal à γ. En résolvant le problème, supposer que le cylindre est à parois très minces et que les contraintes de flexion engendrées dans ses parois ne jouent pas de rôle considérable.

92. Un tuyau à parois minces (fig. 86) se trouve sous l'action d'une pression intérieure p et d'un moment fléchissant M.

En se servant de la théorie de résistance des contraintes tangentielles maximales, étudier comment, sous une pression donnée p, la contrainte fictive $\sigma_{éq}$ dépend de la valeur du moment M.

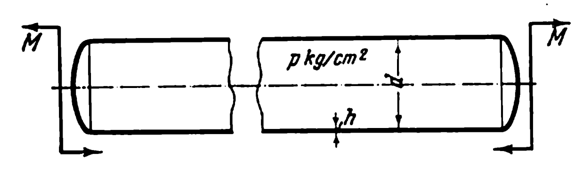


Fig 86

93. Un récipient de forme sphérique, à parois minces, de rayon $R = 0{,}5$ m et d'épaisseur $h = 1$ cm se trouve sous l'action d'une pression intérieure $p_1 = 320$ atm et d'une pression extérieure $p_2 = 300$ atm (fig. 87).

L'on demande de déterminer le taux de sécurité $n_{él}$ des parois du récipient s'il est connu que la limite de déformation élastique $\sigma_{él} = 3000$ kgf/cm².

La solution suivante sera-t-elle juste?

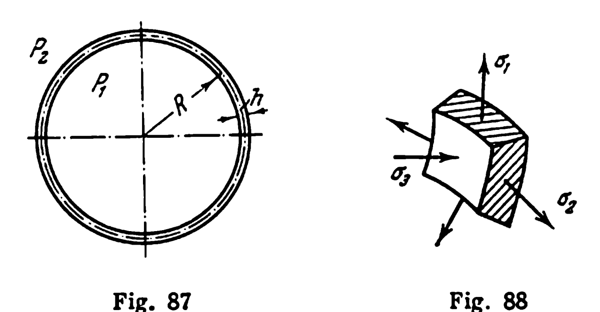


Fig. 87 Fig. 88

Soit un élément relevé de la paroi du côté intérieur de la surface du récipient (fig. 88). Les contraintes principales σ_1 et σ_2 se calculent à partir de la formule connue qui donne les contraintes dans un récipient de forme sphérique:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{(p_1 - p_2)}{2h} R, \quad \sigma_3 = -p_1.$$

Selon la théorie de résistance des contraintes tangentielles maximales,

$$\sigma_{éq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{(p_1 - p_2) R}{2h} + p_1,$$

$$\sigma_{éq} = \frac{20 \cdot 50}{2 \cdot 1} + 320 = 820 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$n = \frac{\sigma_{él}}{\sigma_{éq}} = \frac{3000}{820} = 3{,}66.$$

94. Sur un cylindre plein on enfile compactement, mais sans serrer, un tube à parois minces d'épaisseur h (fig. 89). Le système est plongé dans un liquide et soumis à l'action d'une pression p agissant de tous les côtés. En partant des positions de la théorie de résistance des contraintes tangentielles maximales, montrer sous quelles conditions le tube peut perdre ses propriétés élastiques, les constantes élastiques du cylindre et du tube étant données.

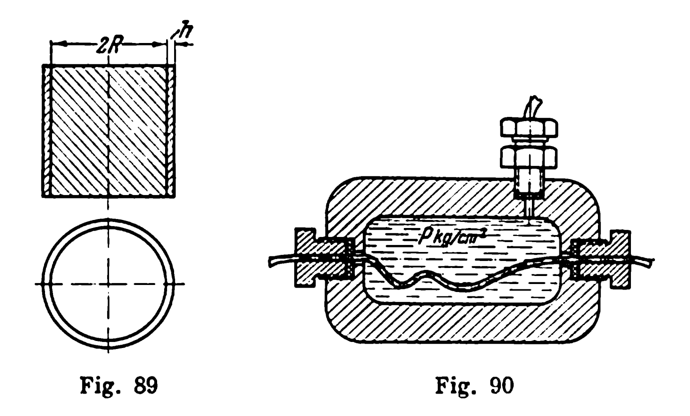


Fig. 89 Fig. 90

95. Dans un récipient (fig. 90) se trouve fixé un fil mince absolument flexible dont les extrémités ressortent à l'extérieur du récipient à travers des orifices pratiqués dans les faces frontales de ce dernier. Les garnitures d'étanchéité sont réalisées de façon idéale et le fil passe à travers elles sans frottement.

Comment se comportera le fil si dans le récipient on réalise une pression p? Quel sera l'état de contrainte du fil?

96. Dans un des livres consacrés aux problèmes de l'hydraulique, il nous est arrivé de prendre connaissance de la description de la procédure d'une expérience ayant pour but la détermination du coefficient de compressibilité des liquides.

« Lors de la détermination du coefficient de compressibilité d'un liquide, il importe d'éviter l'influence de la dilatation du récipient sous l'action de la pression. Pour ce faire, un récipient A rempli du liquide en question C ainsi que du mercure D est déposé dans l'appareil de Recknagel (fig. 91), rempli d'eau. La pression exercée sur le

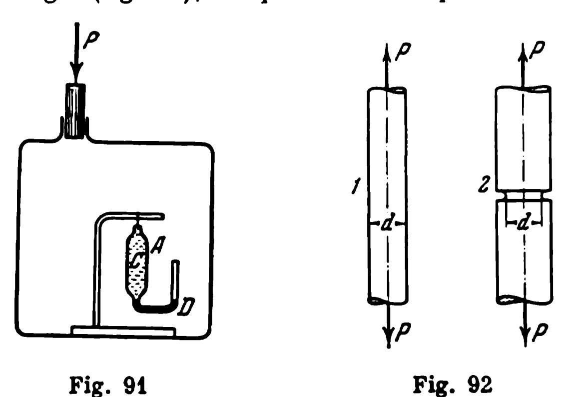


Fig. 91 Fig. 92

piston, se transmettant selon la loi de Pascal, va agir sur le mercure et, par l'intermédiaire de ce dernier, sur le liquide étudié dans le

récipient A en comprimant ledit liquide. Le récipient A est soumis à une pression identique de l'intérieur et de l'extérieur, raison pour laquelle il ne peut changer de volume. »

La procédure d'expérimentation ainsi décrite éliminera-t-elle le changement de volume du récipient sous l'action de la pression?

97. Deux barres en acier doux sont soumises à la traction (fig. 92). La première barre est lisse. Le diamètre de sa section est égal à d. La deuxième comporte une gorge circulaire étroite. Le diamètre de sa section atténuée est, lui aussi, égal à d.

Laquelle de ces deux barres supportera une sollicitation statique plus grande, toutes les autres conditions étant les mêmes?

98. Quels sont les procédés que l'on peut proposer pour réaliser le cisaillement pur?

99. De quelle façon peut-on réaliser un état de contrainte de traction uniformément répartie de tous côtés ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma > 0$)?

100. Lors de l'étude des propriétés des matériaux soumis à de hautes pressions, on a découvert que, sous une pression suffisamment grande, une barre droite cylindrique sollicitée par une pression sur sa surface cylindrique, ses extrémités frontales restant libres, peut se

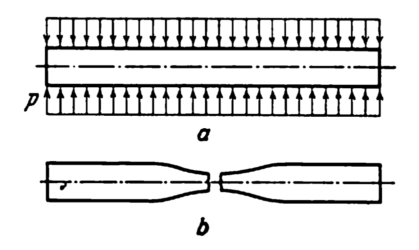


Fig. 93

briser comme c'est représenté sur la fig. 93: avec formation d'une gorge. C'est le phénomène dit rupture à grains qui se produit.

Expliquer les raisons de ce type de rupture.

101. On a fabriqué une éprouvette avec gorge dans un matériau dont la courbe de traction est représentée sur la fig. 94. D'après les études théoriques de G. Oujik, le diagramme des contraintes normales dans une section de la barre faite dans la zone de la gorge a la forme d'une courbe représentée sur la fig. 94. Pourtant, de la courbe de traction on voit que σ_{max} ne peut pas être plus grand que $\sigma_{él}$. Aussi, le diagramme des contraintes reproduit plus haut suscite des doutes, ainsi que les calculs à partir desquels il a été établi.

Ces doutes sont-ils fondés?

102. Peut-on indiquer dans une bande longue dotée d'un orifice (fig. 95) et soumise à la traction un point dans lequel l'état de contrainte serait une compression monoaxiale avec une contrainte σ, la même que celle de la traction de la bande?

103. Un cylindre rond, à parois minces, ayant un petit orifice dans la paroi, est tordu par des moments M et, en même temps, est

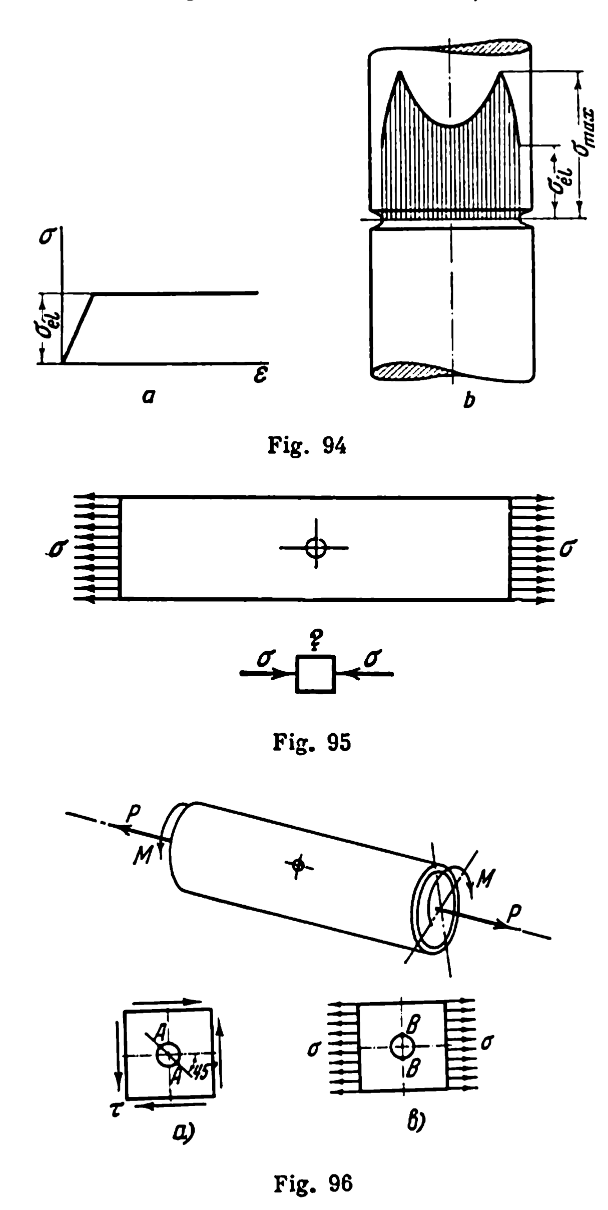


Fig. 94

Fig. 95

Fig. 96

soumis à la traction par des forces P (fig. 96). Si le cylindre était uniquement tordu, la plus grande contrainte se trouverait dans le point A (fig. 96, a) et serait égale à 2τ. Si le cylindre était uniquement soumis

à la traction, alors la contrainte σ_{max} se trouverait dans les points B (fig. 96. b) et serait égale à 3σ.

A quoi sera égale σ_{max} sous l'action simultanée des moments M et des forces P? Dans quel point cette contrainte sera-t-elle engendrée? En résolvant le problème, s'aider uniquement des données tirées des guides, relatives aux contraintes locales.

104. Une poutre droite, de section transversale ronde, est soumise à la torsion par deux moments M. Avec cela dans la poutre apparaissent des déformations plastiques. Comment déterminer le mode de dépendance entre le moment de torsion M et l'angle de torsion θ si la courbe de traction $\sigma = f(\varepsilon)$ du matériau est donnée?

IV. STABILITÉ

105. Soit une barre mince, flexible, fixée dans des glissières verticales (fig. 97). A son extrémité inférieure la barre est encastrée dans un tampon mobile reposant sur un ressort hélicoïdal de rigidité $c\left(\lambda = \frac{P}{c}\right)$. Avec l'augmentation de la force de compression P, la longueur $l - \lambda$ de la partie saillante de la barre diminue alors que la longueur de sa partie inférieure λ augmente. Quelle doit être la rigidité c du ressort pour que la barre, se déplaçant en bas d'une longueur l, ne perde pas de stabilité dans ses parties inférieure et supérieure?

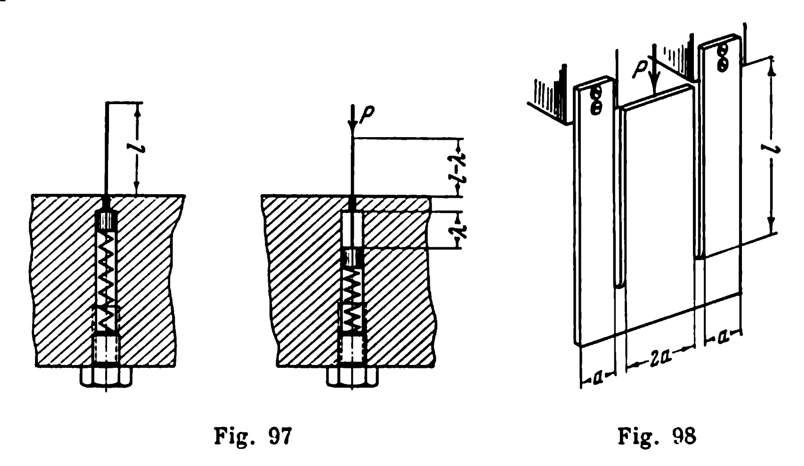


Fig. 97 Fig. 98

106. Soit une plaque profilée, fixée et sollicitée comme l'indique la fig. 98. Déterminer la force critique pour la plaque dans les deux cas suivants:

1) la force est dirigée en bas; 2) la force est dirigée en haut.

La rigidité en flexion de la partie du milieu équivaut à la somme des rigidités des parties extrêmes.

107. Trouver la valeur critique de la force P pour la barre de la fig. 99. Les extrémités de la barre sont dotées de liaisons articulées et ne peuvent se déplacer ni horizontalement ni verticalement.

108. Un boulon long est fixé dans un tube de telle façon qu'un jeu est assuré (fig. 100). Déterminer la force P de serrage du boulon sous laquelle le système devient non stable. Les dimensions du tube sont telles qu'il convient de le considérer comme une barre longue et non comme une coque. La rigidité en flexion du tube est E_1J_1, celle du boulon, E_2J_2.

109. Une barre articulée à ses extrémités (fig. 101) est soumise à un échauffement uniforme.



Fig. 99

En supposant les appuis tout à fait indéformables, déterminons la contrainte normale de compression. Elle aura, comme on sait, la valeur de $N = \alpha tEF$. Pour une force $N = \pi^2 EJ/l^2$, la forme droite d'équilibre de la barre doit devenir

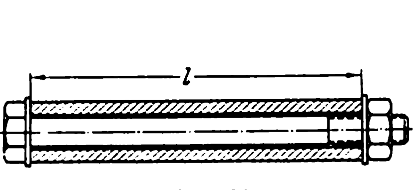


Fig. 100

Fig. 101

instable et, si l'échauffement continue, la barre prendra une forme bombée. De là, trouvons la température critique

$$t_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 J}{\alpha F l^2}$$

Cependant, le raisonnement précédent ne va pas sans susciter des doutes. En effet, quand on étudie le problème de stabilité d'un montant sollicité par des forces de compression P, la valeur de la force P est supposée constante pendant le voilement et ne dépend pas de la courbure du montant. Dans le cas présent, tout voilement quel qu'il soit du montant suffit pour faire tomber la force N; aussi, n'est-il pas fondé de transposer automatiquement la solution de ce problème général au cas présent. C'est pourquoi, semble-t-il, dans le cas présent, la force critique N sera différente de la valeur adoptée $\pi^2 EJ/l^2$.

Comment dissiper ces doutes?

110. La méthode énergétique constitue la méthode favorite d'approximation pour la détermination des charges critiques. La forme d'équilibre à trouver est choisie approximativement de telle manière que, d'une part, soient remplies les conditions aux limites et que, d'autre part, la courbe adoptée ressemble le plus possible à la véritable forme d'équilibre que l'on ignore mais que l'on peut

cependant supposer intuitivement en partant des considérations relatives à l'essence physique même du problème.

N'y a t-il donc pas de danger à ce que, quand la fonction approximante se rapproche asymptotiquement de la forme véritable de la déformée, on n'ait pas la valeur exacte de la force critique?

111. Déterminer la force critique pour le support indiqué sur le dessin (fig. 102).

Les barres sont encastrées et reliées rigidement l'une avec l'autre. La flexion en flambement a lieu dans le plan du support.

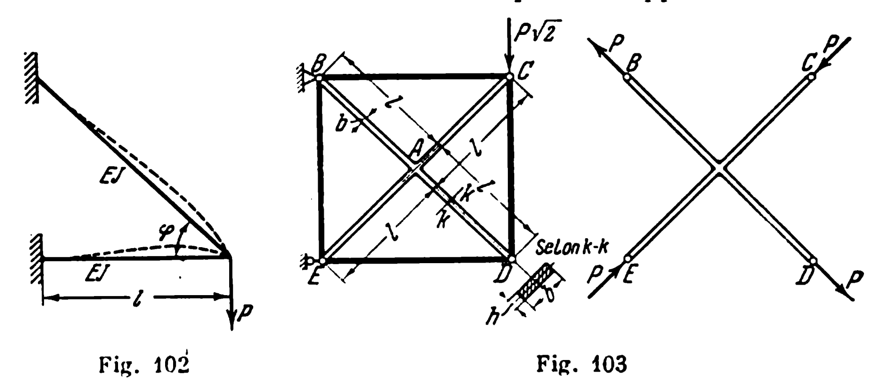


Fig. 102   Fig. 103

112. Un cadre plan constitué par deux barres rigides, se trouve renforcé par deux diagonales flexibles de longueur 2 l chacune, reliées entre elles (fig. 103). Les diagonales ont une section transversale rectangulaire avec pour dimensions b et h ($b \gg h$). Si le cadre supporte une charge égale à $P\sqrt{2}$ comme indique le dessin (fig. 103), une des diagonales sera tendue et l'autre, comprimée, chacune par une force égale à P.

Sous quelle valeur de la force P aura lieu le voilement des barres en dehors du plan des cadres?

113. L'on sait qu'un fil droit, long, tordu par deux moments de torsion, peut subir, sous des conditions déterminées, un flambement.

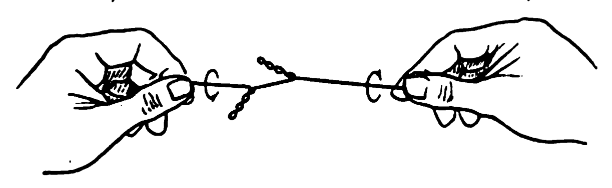


Fig. 104

Un flambement de ce genre se manifeste, on ne peut mieux, dans le cas de la torsion des fils et des câbles. Si l'on tord un fil, il épouse très vite une forme curviligne plus ou moins rappelant celle de la fig. 104. Il est tout à fait évident que si, en même temps qu'on le tend, on étire le fil, le moment de torsion sous lequel a lieu le flam-

bement augmente sensiblement. Au cours de l'enroulement d'un câble, il importe toujours de le tendre.

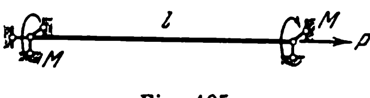


Fig. 105

Pour le cas d'une barre aux appuis articulés (fig. 105), déterminer la valeur du moment de torsion critique et établir comment il dépend de la force de traction.

114. Une barre de section constante F se trouve sous l'action d'une pression uniforme agissant de tous côtés (fig. 106). Il est clair, que sous ces conditions sur la barre agisse une force de compression longitudinale $P = pF$.

L'on demande si, moyennant une quantité suffisante de la pression, cette forme ne peut pas provoquer le flambement de la barre?

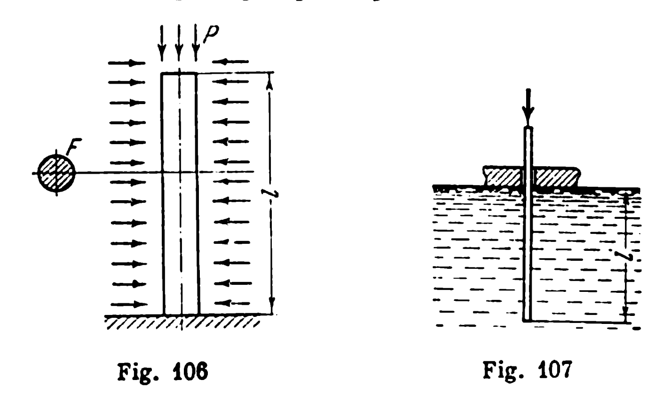


Fig. 106 Fig. 107

115. Une barre droite en bois, de section transversale constante, est plongée par l'une de ses extrémités dans l'eau. Au niveau de l'eau, la barre est encastrée (fig. 107). L'on demande si pour la barre peut avoir lieu perte de stabilité sous l'effet des forces de poussée d'Archimède à supposer que sa longueur soit suffisamment grande.

116. Par son ouverture à l'extrémité supérieure, on remplit un tuyau encastré à son extrémité inférieure (fig. 108) d'un liquide de poids spécifique γ. L'on demande si au cours de ce remplissage le tuyau peut avoir une perte de stabilité selon Euler?

117. Un tube droit aux parois épaisses (fig. 109) est rempli d'un liquide incompressible. Un bouchon est fixé dans l'ouverture supérieure du tube. Le tube et le bouchon sont dotés d'appuis articulés comme indique la fig. 109. Quand on applique sur le bouchon une force P, le liquide se comprime mais, dans le tube, il n'y aura pas de force de compression longitudinale.

Peut-il y avoir, dans ces conditions, un flambement du tube selon Euler?

118. Un tube long et mince se trouve, par le truchement d'une ouverture à son extrémité supérieure, enfilé sans frottement sur un

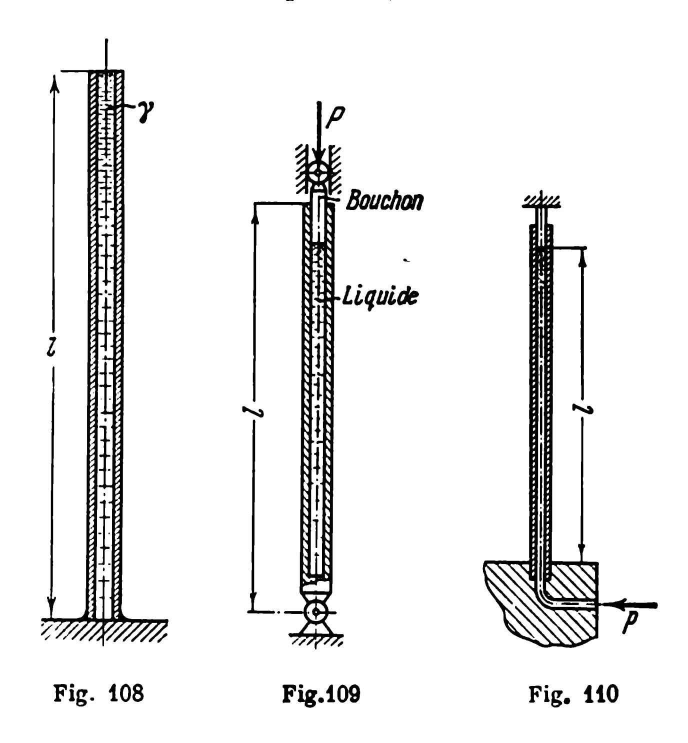


Fig. 108 Fig. 109 Fig. 110

tampon rigide et immobile. Par son extrémité inférieure, le tube est encastré dans une assise rigide (fig. 110). Dans le tube on introduit une pression p.

Le tube, peut-il subir un flambement selon Euler sous une pression suffisamment grande?

119. A travers un tube appuyé sur des charnières par les deux bouts (fig. 111), on injecte un liquide de poids spécifique γ. Mon-

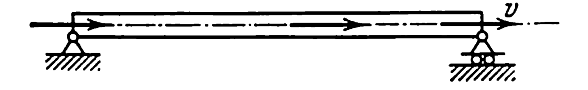


Fig. 111

trer que sous une certaine vitesse v du liquide a lieu le flambement du tube de la même façon qu'a lieu le flambement, selon Euler, d'une barre.

120. Etudions le problème suivant. Une barre comportant à ses extrémités des arrondissements de rayon R se trouve comprimée,

sans frottement, entre deux plaques rigides (fig. 112). L'on demande de déterminer la force critique.

Appelons axe x la ligne d'action des forces de compression et désignons par y le déplacement transversal de l'axe de la poutre. On aura, comme d'ordinaire:

$$EJy'' + Py = 0,$$

$$y'' + \alpha^2 y = 0,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

$$(\alpha^2 = P/EJ).$$

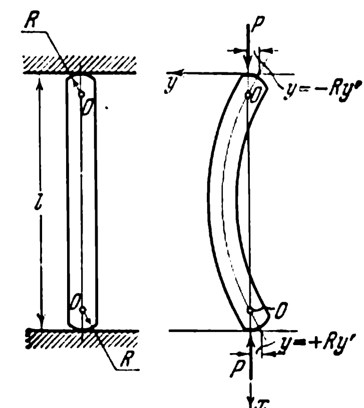
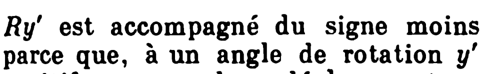


Fig. 112

Aux extrémités de la barre, le déplacement y est proportionnel à l'angle de rotation y'. En d'autres mots,

$$y = -Ry' \quad \text{pour} \quad x = 0;$$



Ry' est accompagné du signe moins parce que, à un angle de rotation y' positif correspond un déplacement y négatif. Ainsi donc, on aura

$$B = -\alpha RA, \qquad y = A\,(\sin \alpha x - \alpha R \cos \alpha x).$$

De plus, pour $x = l, y = +Ry'$; dans ce cas, si y' est positif, y l'est aussi. Par conséquent,

$$A\,(\sin \alpha l - \alpha R \cos \alpha l) = A\,(\alpha R \cos \alpha l + \alpha^2 R^2 \sin \alpha l).$$

Comme $A \neq 0$, on aura

$$\operatorname{tg} \alpha l = \frac{2\alpha l \dfrac{R}{l}}{1 - (\alpha l)^2 \dfrac{R^2}{l^2}}. \tag{1}$$

En fonction de la relation R/l, déterminons une racine de cette équation transcendante, la plus petite, différente de zéro; calculons ensuite la force critique.

Puisque $\alpha^2 = P/EJ$, la force critique sera égale à

$$P_{\text{cr}} = \frac{(\alpha l)^2 EJ}{l^2}. \tag{2}$$

Dans cette relation, à la place de αl, il faut mettre la première racine (la plus petite) de l'équation (1).

Déterminons maintenant la racine la plus petite αl de l'équation (1) en fonction de R/l. Le moyen le plus simple d'établir cette dépendance consiste à choisir d'une façon ou d'une autre les valeurs de αl pour déterminer ensuite celles de R/l de l'équation (1). Les ré-

sultats de ces calculs sont représentés sur la courbe de la fig. 113. De cette courbe, on trouvera aisément $\alpha l = \pi$ pour $R/l = 0$, et, par

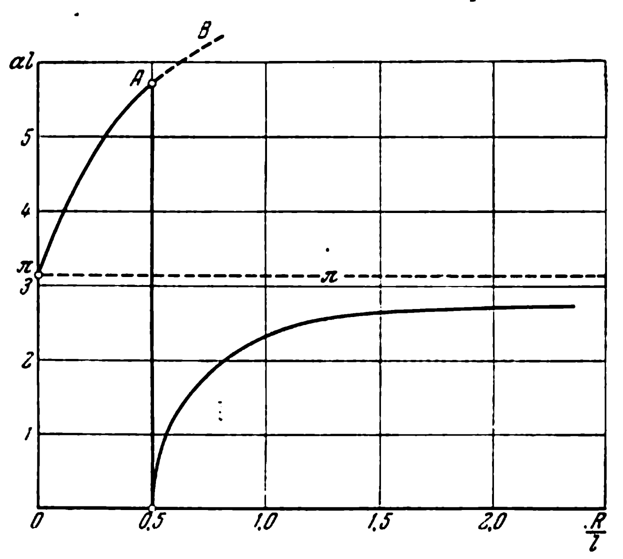


Fig. 113

conséquent, au moyen de (2)

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Ainsi donc, la force critique est égale à la force d'Euler ordinaire, comme il fallait s'y attendre.

Avec l'augmentation de R/l, la valeur de αl le fait aussi et, par conséquent, augmente également la force critique. Cela paraît être assez évident. Cependant, comme il ressort de la courbe, pour $R/l =$ $= 0{,}5$ la force critique tombe subitement à zéro et puis, avec l'augmentation du rayon R, se remet de nouveau à croître pour atteindre, à la limite, avec $R/l = \infty$, la valeur de la force critique.

Donner une interprétation du résultat obtenu.

121. Une barre flexible, longue, aux extrémités articulées, est fixée dans un tuyau rigide de telle façon qu'un jeu soit assuré (fig. 114).

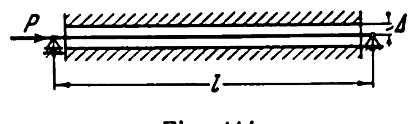


Fig. 114

L'on demande quelles contraintes se développent dans la barre si on la comprime avec une force plus grande que la première force

critique, c'est-à-dire une force plus grande que $\pi^2 EJ/l^2$? La rigidité en flexion de la barre est égale à EJ.

122. Calculer la force critique pour une barre encastrée à ses extrémités (fig. 115).

La barre est dotée d'une rigidité en flexion qui varie en fonction du signe du moment fléchissant (EJ_1 et EJ_2). On a affaire à une telle propriété dans le cas, par exemple, d'une poutre disposant, d'un côté, d'entaillements dans lesquels sont inserrées compactement des plaques (fig. 115). De même, on aura une rigidité en flexion variable en fonction du signe du moment fléchissant dans le cas d'une barre à section non symétrique, comprimée, à condition que les déformations plastiques y soient présentes (cf. problème 155).

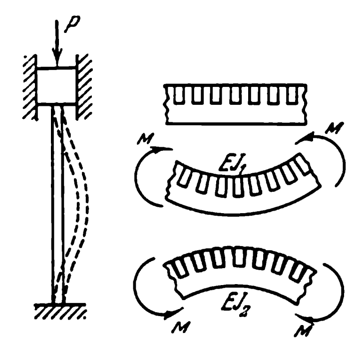


Fig. 115

123. Une barre encastrée à l'une de ses extrémités dispose d'un trou débouchant axial. Dans ce trou est placée sans jeu ni frottement une corde flexible, fixée à l'extrémité libre de la barre (fig. 116). A supposer qu'à cette corde on attache un poids suffisamment grand P, peut-il y avoir perte de stabilité pour la barre?

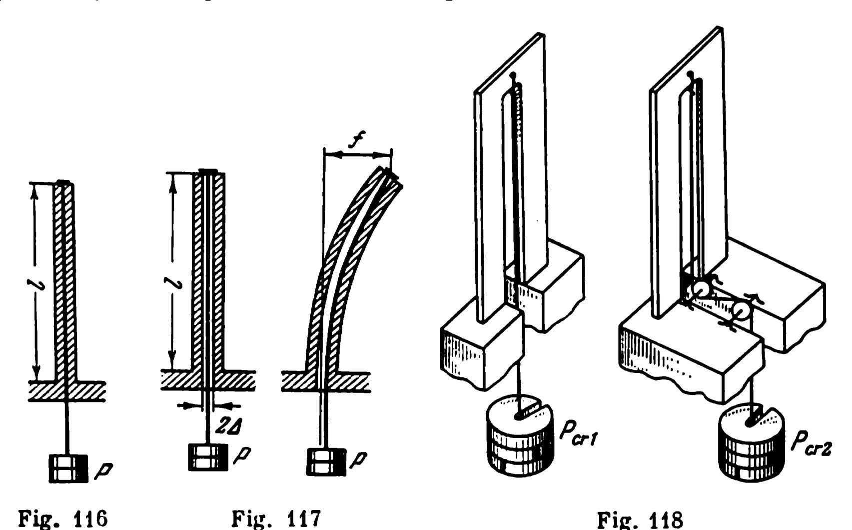


Fig. 116 Fig. 117 Fig. 118

124. Le schéma du problème précédent est modifié de la manière suivante : la corde est fixée de façon à assurer un jeu de valeur Δ de chaque côté (fig. 117). Calculer le déplacement latéral f de l'extrémité de la barre en fonction de la force P.

125. Un poteau encastré à son extrémité inférieure est sollicité à son extrémité libre par une force verticale qui se transmet par l'intermédiaire d'un câble (fig. 118). La transmission de la sollicitation par l'intermédiaire du câble se fait de deux manières. Dans le premier cas, le câble se déplace librement en bas. Dans le second cas, le câble passe, sans frottement, à travers deux poulies rigides. Dans lequel de ces deux cas la force critique P_{cr} pour le poteau sera la plus grande?

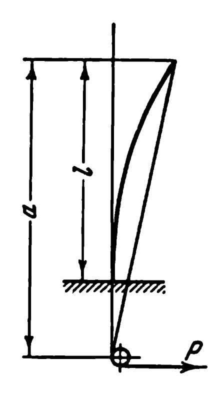


Fig. 119

126. En liaison avec la question précédente, on peut poser le problème suivant: déterminer, en fonction de a (distance entre le bout du poteau et la poulie), la force critique pour un poteau de longueur l (fig. 119).

127. Deux barres ayant une même rigidité et des longueurs différentes sont comprimées par une force longitudinale P (fig. 120).

A quelle distance, à partir de l'emplacement de l'encastrement, il faut placer une charnière pour que le taux de stabilité soit le même pour les deux barres?

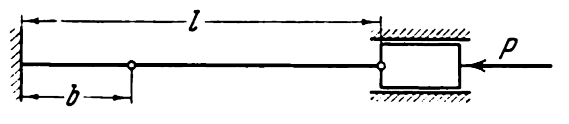


Fig. 120

128. Par-dessus une barre, on fait passer, sans frottement, un fil à l'extrémité duquel on applique une force $P/2$ de telle manière que la barre soit comprimée par une force P. L'extrémité gauche du fil est fixée de façon telle qu'elle ne peut bouger (fig. 121).

Lorsque la barre dévie de la position verticale, la moitié du fil repose compactement sur la surface latérale de la barre, donnant lieu à une pression de contact. De l'autre côté de la barre, le fil épouse librement une position verticale.

Déterminer la force critique.

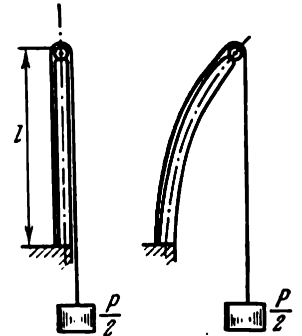


Fig. 121

129. Une barre encastrée à l'une de ses extrémités dispose à l'autre d'une poulie par laquelle on fait passer, sans frottement, une corde (fig. 122). La corde se tend à l'aide d'un assemblage à vis A et, dans la barre, se crée une force de compression P.

Déterminer sous quelle valeur de la force P la forme rectiligne d'équilibre devient instable.

130. Un anneau se trouve sous l'effet d'une sollicitation externe régulièrement répartie (fig. 123). Y aura-t-il une différence quelconque dans les valeurs de la force critique si, dans le premier cas,

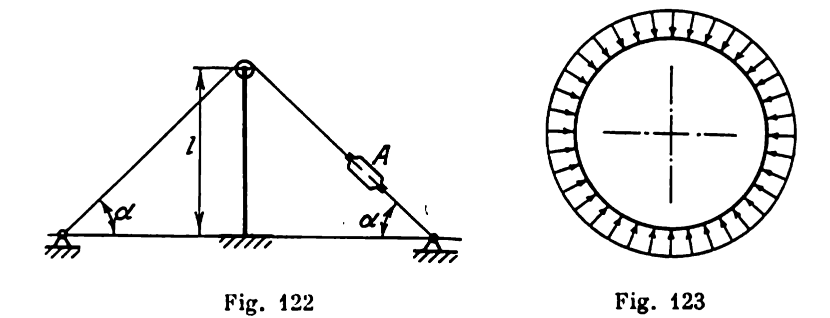


Fig. 122 Fig. 123

cette dernière est le résultat d'une compression constamment dirigée selon la normale à l'arc de l'anneau ou si, dans le second cas, elle est engendrée par des forces radiales constamment dirigées vers le centre ?

Le premier type de sollicitation peut être réalisé, par exemple, dans le cas d'une pression de l'air exercée dans un sac en caoutchouc (fig.124, *a*) tandis que le second type de sollicitation peut l'être

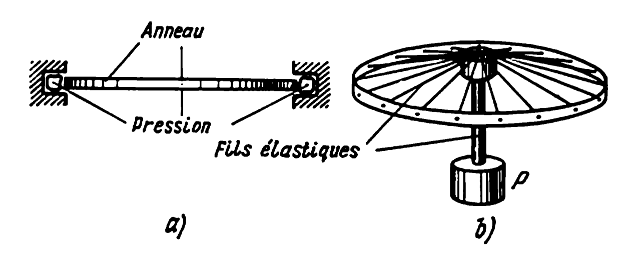


Fig. 124

au moyen d'un système fait d'un grand nombre de fils élastiques passant par une douille fixée de façon immobile au centre (fig. 124, *b*).

131. Soit un cylindre et deux pistons dans l'espace entre lesquels on introduit une pression p (fig. 125). Les forces engendrées sont transmises à une barre de longueur l par l'intermédiaire d'une tige et de deux bielles. Ainsi donc, la barre sera sollicitée par deux forces égales P appliquées à son extrémité et dirigées dans des sens opposés.

Cette forme d'équilibre est-elle stable ?

132. Une barre encastrée à l'une de ses extrémités est sollicitée à l'autre par deux moments égaux en valeur mais appliqués dans des directions opposées. Ces moments sont créés par quatre poids P (fig. 126). Etudier la stabilité du système.

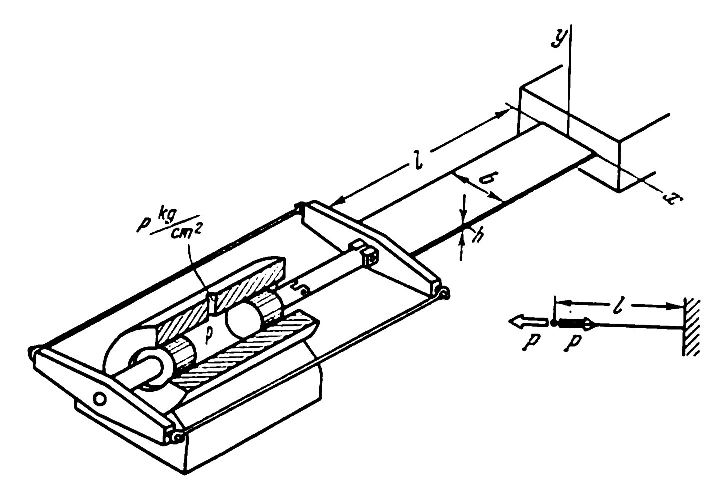


Fig. 125

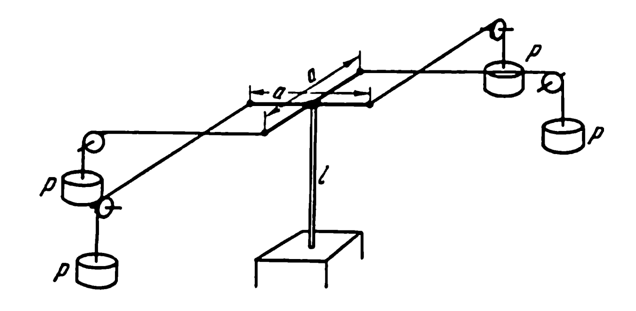


Fig. 120

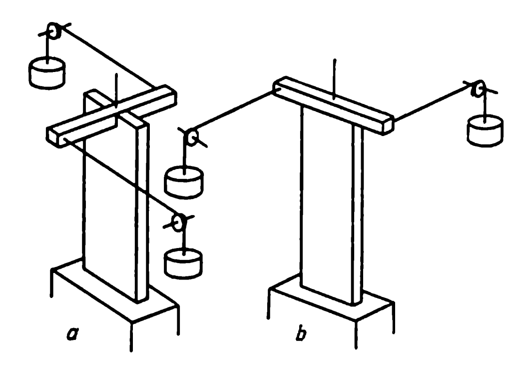


Fig. 127

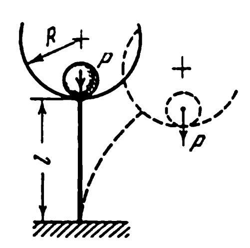


Fig. 128

133. En liaison avec le problème précédent, une question se pose : la valeur du moment critique ne va-t-elle pas dépendre de la façon dont les bras de levier des forces sont orientés par rapport aux axes principaux d'une section transversale de la barre? Dans le cas *a*) (fig. 127), le plan du moment M se retourne ensemble avec la section frontale lors d'une flexion par rapport à l'axe correspondant à la rigidité minimale tandis que dans le cas *b*), lors d'une flexion par rapport à l'axe correspondant à la rigidité maximale.

134. Comment la valeur de la force critique P dépend-elle du rayon R de la cuvette (fig. 128)?

135. Lors de l'élaboration d'un projet de construction d'un château d'eau s'est posé le problème de la stabilité de la structure

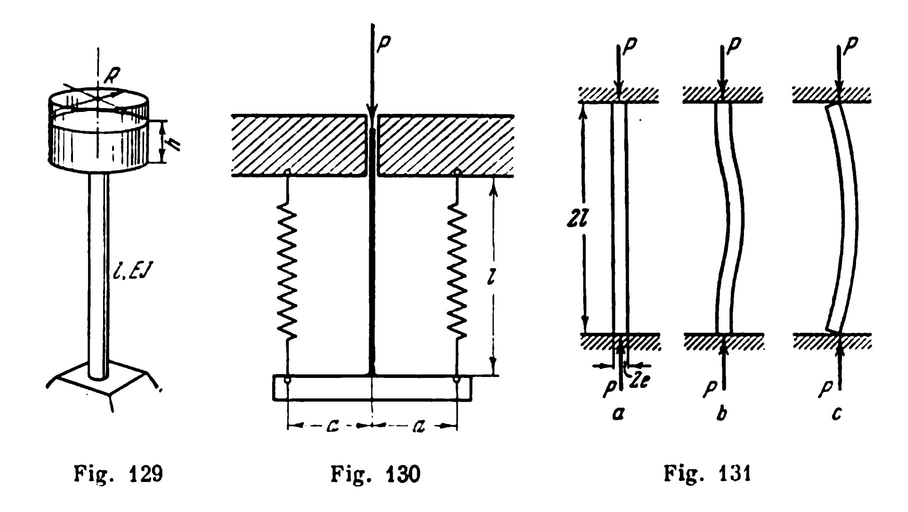


Fig. 129 Fig. 130 Fig. 131

représentée sur la fig. 129. Jusqu'à quel niveau le réservoir doit-il être rempli de liquide pour que survienne le flambement du mât porteur?

136. Trouver la valeur critique de la force P pour le système représenté sur la fig. 130; l'on suppose que la flexion de la barre a lieu dans le plan du dessin.

La rigidité en traction des ressorts est égale à c. La planche de longueur $2a$ est à considérer comme absolument rigide.

137. Une barre ayant des extrémités frontales plates est comprimée par deux plaques (fig. 131, *a*). Le flambement peut survenir selon l'une de ces deux principales formes d'équilibre curvilignes : la première, représentée sur la fig. 131, *b*, correspond à une force critique

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{(2l)^2},$$

tandis que la deuxième, représentée sur la fig. 131, *c*, a lieu lorsque la barre s'appuie contre les plaques uniquement par les coins.

Il est évident que si les abouts ne sont pas très larges, le flambement selon cette seconde forme surviendra sous une force plus petite que dans le premier cas. En particulier, si la largeur des abouts est égale à zéro, la force critique sera :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}.$$

Déterminer la force critique la plus petite dans le cas où la largeur de chaque about est égale à $2e$.

138. Une poutre impondérable (fig. 132) encastrée à l'une de ses extrémités repose librement sur une assise rigide. A l'autre extrémité libre, au centre, la poutre est sollicitée par une force P, appliquée

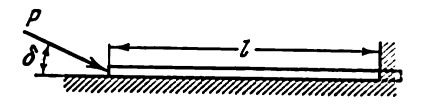


Fig. 132

sous un angle δ par rapport à l'assise rigide. L'on demande pour quelle valeur de la force P (sous un angle donné δ) survient le flambement de la poutre?

139. Une poutre en coude, absolument rigide (fig. 133) est renforcée par une barre mince, flexible, de longueur $2l$. Etudier la stabilité du système.

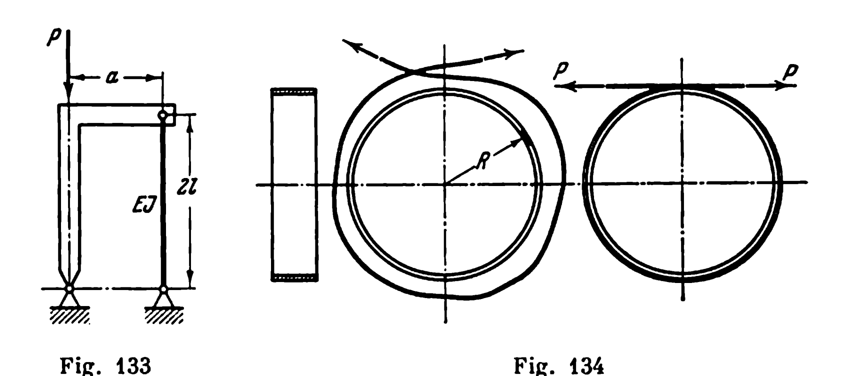


Fig. 133 Fig. 134

140. Autour d'un anneau à parois minces on fait passer un fil fin, inextensible et absolument flexible qui, dans la suite, sera soumis à l'extension par une force P (fig. 134). L'on demande pour quelle valeur de la force P l'anneau perd de stabilité? Le frottement entre la surface de l'anneau et le fil peut être négligé.

141. Dans une frette cylindrique rigide, on place un anneau flexible (fig. 135) soumis ensuite à l'échauffement. Entre l'anneau et la frette apparaissent des forces de contact. L'anneau peut-il, dans ces conditions, perdre de stabilité?

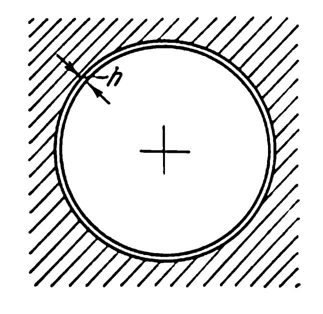


Fig. 135

142. Une barre mince, flexible, aux appuis articulés est comprimée par une force longitudinale P égale à

$$10\frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Entre les articulations, on prévoit des liaisons supplémentaires ne permettant pas le bombement de la barre (fig. 136). N'auraient été ces liaisons, déjà sous une force égale à $1/10\ P$, la forme rectiligne d'équilibre serait devenue instable. Dans l'intervalle de variation de la force de $\pi^2 EJ/l^2$ à $10\pi^2 EJ/l^2$ on passe, comme on sait, par deux autres valeurs critiques de la force: $4\pi^2 EJ/l^2$ et $9\pi^2 EJ/l^2$ qui correspondent aux formes de flexion de la barre selon deux ou trois demi-ondes.

Supposons que les liaisons intermédiaires qui soutiennent la barre sont subitement enlevées. Dans ce cas, la barre va, de toute évidence, s'incurver. Mais comment? Selon une, deux ou trois demi-ondes?

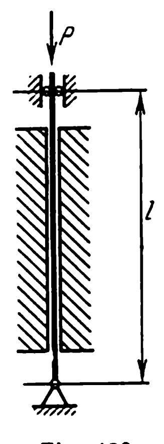


Fig. 136

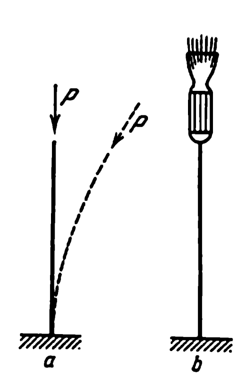


Fig. 137

143. Une barre (fig. 137, *a*) est encastrée à l'une de ses extrémités. A l'autre, est appliquée une force P caractérisée par cette propriété-ci que, lors de la flexion de la barre, elle reste constamment dirigée suivant la tangente à la déformée de la barre. Une sollicitation avec pareille propriété peut être réalisée, par exemple, dans le cas d'un moteur-fusée à poudre, placé au sommet d'une barre (fig. 137, *b*).

On demande d'étudier la stabilité du système.

144. Une barre encastrée à l'une de ses extrémités comporte à l'extrémité libre un disque rigide auquel est appliquée une force P. Le point d'application de la force se trouve constamment sur l'axe x (fig. 138).

Etudier la stabilité du système dans deux cas:

a) la force P est provoquée par un flux de particules inélastiques qui bombardent le disque ; dans ce cas, lorsque le disque se retourne, la direction du vecteur P reste inchangée ;

b) la force P est provoquée par un poids transmis par l'intermédiaire d'une tige ; dans ce cas, la direction de la force P coïncide avec la normale au disque.

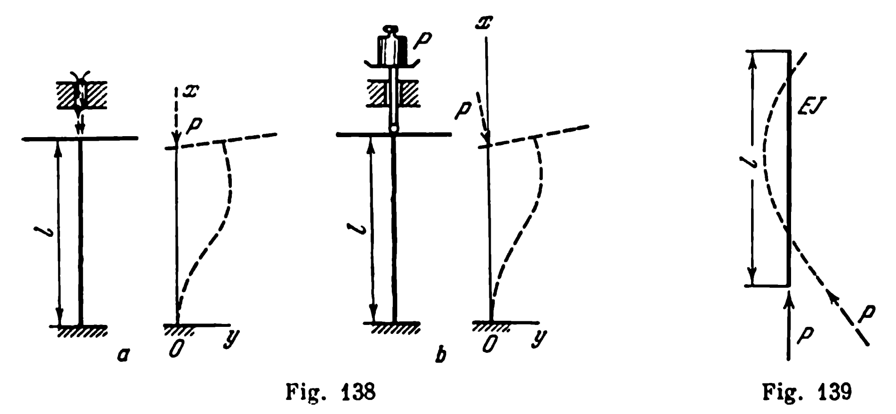


Fig. 138 Fig. 139

145. Une barre flexible homogène effectue un mouvement uniformément accéléré sous l'action d'une force appliquée à l'une de ses extrémités frontales. La direction de la force se modèle à la déformation de la barre (fig. 139). Etudier la stabilité de la forme rectiligne d'équilibre de la barre.

146. Une barre homogène est comprimée par deux forces dont la direction se règle à la déformation de la barre (fig. 140). Etudier la stabilité du système.

147. Déterminer le moment M sous lequel la console de la fig. 141 perd de stabilité du point de vue forme plane de flexion. Lors de la flexion, le moment M reste constamment dans le plan vertical.

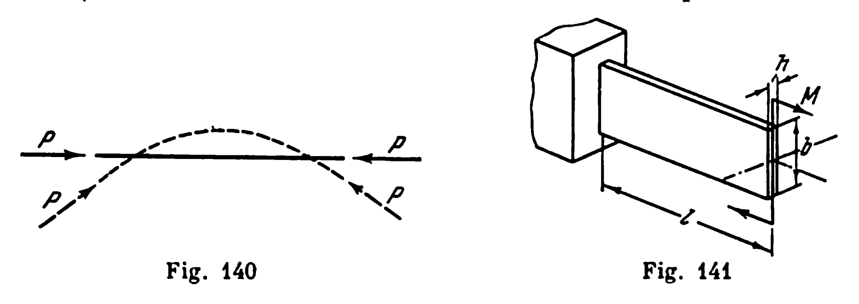


Fig. 140 Fig. 141

148. Analyser la stabilité d'une barre encastrée, sollicitée à son sommet par une force P et un moment M (fig. 142). La force garde constamment une forme verticale.

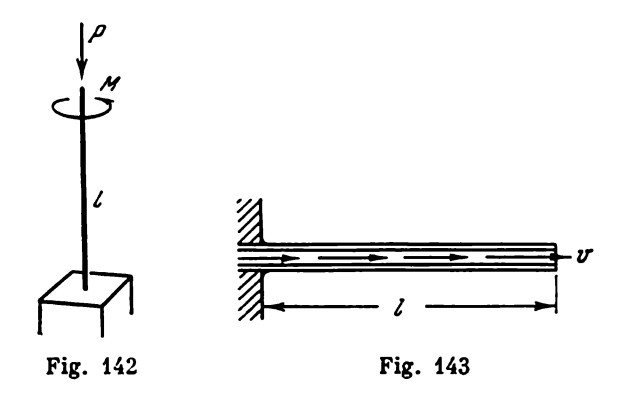


Fig. 142 Fig. 143

149. Etudier la stabilité d'une tuyauterie encastrée à l'une de ses extrémités et dans laquelle coule un liquide (fig. 143). Les paramètres de la tuyauterie et du flux sont donnés.

150. Une bande mince et longue (fig. 144) est soumise à un échauffement uniforme sur sa longueur l et son épaisseur h, mais non uniforme sur sa largeur b.

Déterminer les conditions sous lesquelles a lieu un flambement avec torsion de la bande.

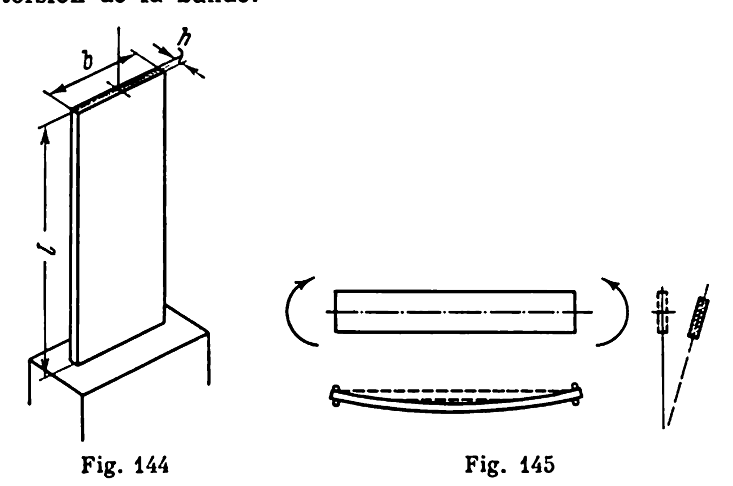


Fig. 144 Fig. 145

151. Dans tous les monographies et guides sur la stabilité des systèmes flexibles les problèmes liés à la stabilité de la forme plane de flexion sont formulés avec une supposition tacite selon laquelle le moment est appliqué dans un plan correspondant à la rigidité maximale (fig. 145).

Peut-il y avoir perte de stabilité de la forme plane de flexion si le moment est appliqué non pas dans le plan correspondant à la rigidité maximale, mais, par contre, dans celui correspondant à la rigidité minimale?

152. Un anneau de rayon R ayant une section transversale rectangulaire (fig. 146) se retourne à l'envers de telle manière que la surface interne se retrouve à l'extérieur et vice versa. Sous quelles relations entre b et h cette forme d'équilibre sera-t-elle stable? Les déformations sont supposées élastiques.

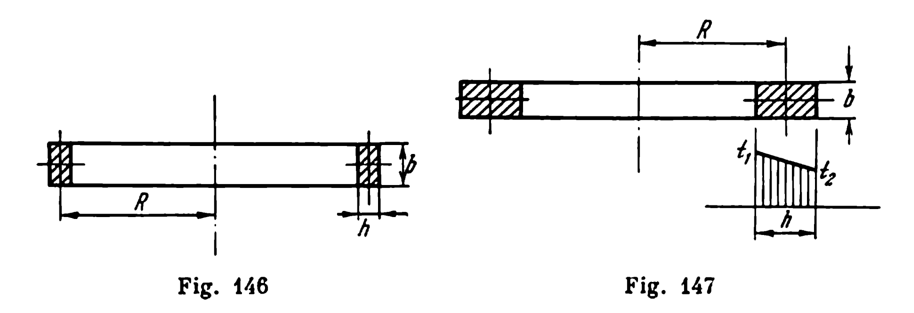


Fig. 146 Fig. 147

153. Un anneau de section transversale rectangulaire (fig. 147) est soumis à l'échauffement de l'intérieur ou de l'extérieur; la température reste variable sur l'épaisseur h de l'anneau. Trouver les conditions de stabilité de la forme initiale d'équilibre en supposant que $h \ll R$. On peut considérer que la température change selon une fonction linéaire.

154. Un anneau flexible de rayon R ayant une section transversale rectangulaire est fendu et se dresse à l'aide de deux moments jusqu'à ce que son axe épouse une forme rectiligne (fig. 148). La tige ainsi obtenue est encastrée à ses extrémités.

Dans quels cas cette forme d'équilibre sera-t-elle stable?

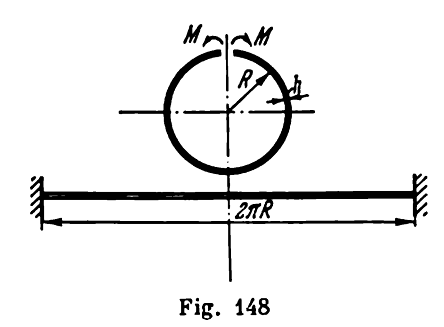


Fig. 148

155. Une barre ayant un profil en forme d'auge (fig. 149) se trouve comprimée par une force P appliquée au centre et provoquant des déformations plastiques. Dans quelle direction il est le

plus probable que la barre se bombe lors du flambement? A droite ou à gauche?

156. Peut-il y avoir flambement d'un ressort à boudin, cylindrique, en traction?

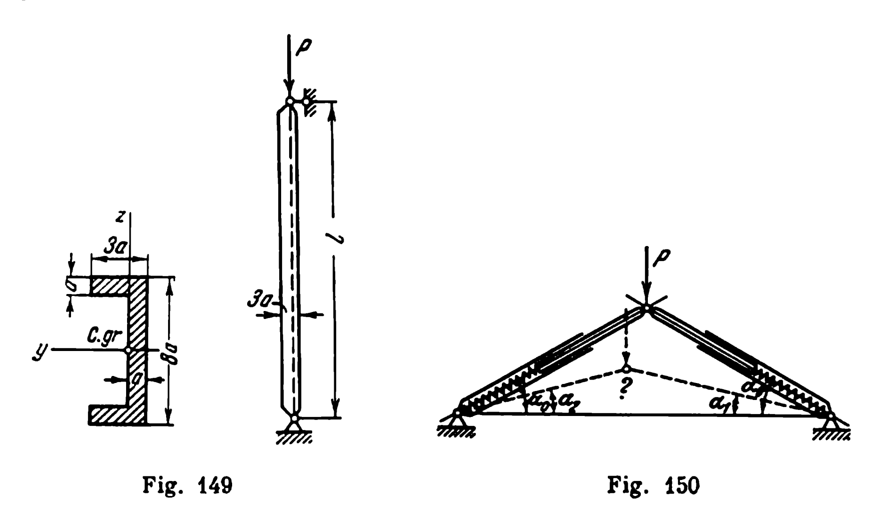


Fig. 149 Fig. 150

157. Deux barres sont sollicitées dans un nœud commun par une force P (fig. 150). Chacune de ces barres est un dispositif télescopique avec un grand diapason de changement de longueur.

Existe-t-il des conditions sous lesquelles a lieu le passage de la forme symétrique d'équilibre à une forme non symétrique?

158. Quatre billes identiques de masse m sont fixées sur des tiges comme le montre la fig. 151.

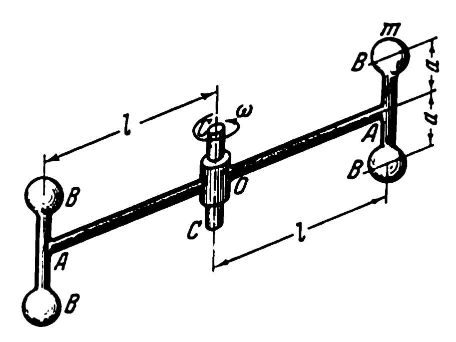


Fig. 151

Le système tourne autour de l'axe CC fixé dans des paliers rigides. S'il n'y avait pas de paliers (le système serait, par exemple, fixé à un fil), comme l'enseigne la physique, les billes se retourneraient autour de l'axe AA pour se mettre dans un plan horizontal.

Dans le cas présent, un tel changement d'orientation se trouve gêné par les paliers rigides ainsi que par les tiges flexibles AA dotées d'une section transversale ronde. Peut-on indiquer une vitesse angulaire ω pour laquelle les billes pourraient, malgré tout, se retourner d'un certain angle par rapport à l'axe AA?

159. Une barre homogène, ayant une section transversale rectangulaire étroite, tourne autour de l'axe OO (fig. 152), parallèle au plus grand côté de la section. Déterminer la vitesse angulaire ω sous laquelle cette barre se mettra à tourner de la même manière que les barres AA du système étudié dans le problème précédent.

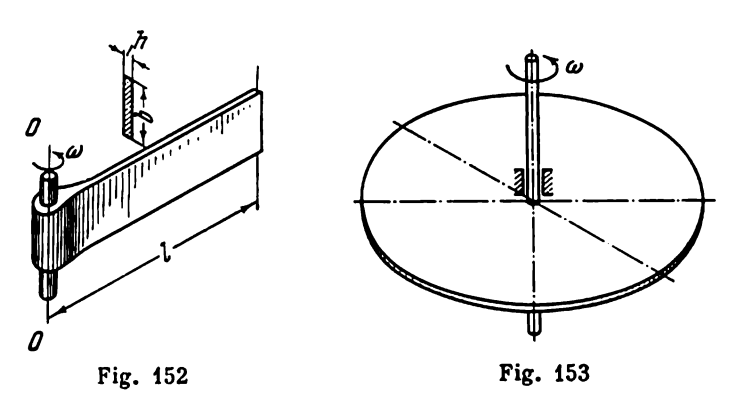


Fig. 152 Fig. 153

160. Un disque homogène, mince (fig. 153), tourne autour d'un axe immobile, perpendiculaire au plan du disque. Peut-il y avoir perte de stabilité du disque dans sa forme plane d'équilibre?

161. Trouver le nombre critique de tours pour un anneau de masse m, relié à un axe immobile de n rais uniformément distancés (fig. 154). La rigidité en traction des rais est égale à EF.

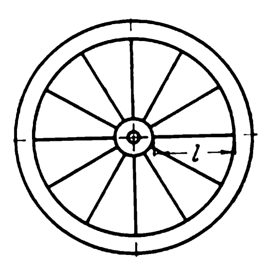


Fig. 154

162. Un vase sphérique en caoutchouc, fermé, à parois minces, se trouve sous l'action d'une pression interne.

La forme sphérique restera-t-elle toujours stable?

163. Expliquer, du point de vue de la stabilité des formes d'équilibre, la formation du collet lors des essais à la traction des éprouvettes.

V. QUESTIONS ET PROBLÈMES DIVERS

164. A quel matériau appartient la limite de résistance la plus grande?

165. Quel est le matériau qui supporte une charge plus grande en traction qu'en compression?

166. A quel matériau appartient le module d'élasticité le plus grand?

167. A quel matériau appartient le module d'élasticité le plus petit?

168. Le caoutchouc obéit-il à la loi de Hooke?

169. Lors de la traction, le long des fibres d'une barre en bois on a mesuré l'allongement longitudinal ainsi que le rétrécissement transversal de l'éprouvette. Le rapport entre le rétrécissement transversal relatif et l'allongement longitudinal s'est avéré égal à 0,6.

Peut-on être d'accord avec un tel résultat?

170. Pourquoi le module réduit d'élasticité d'un câble est-il inférieur au module d'élasticité des fils qui le composent?

171. Pourquoi un fil tordu est-il plus résistant qu'un fil non tordu?

172. Un professeur qui dirigeait le travail d'élaboration d'un projet, après avoir examiné le travail d'un étudiant, fit remarquer que l'arbre du moteur était trop long et n'allait pas avoir une rigidité suffisante.

« Cela est facile à corriger sans modifier la structure », lui répondit l'étudiant. « Il suffira de prendre un matériau d'une meilleure qualité: je ferai un arbre en acier allié ».

L'étudiant avait-il raison?

173. Pour une certaine poutre (fig. 155), sollicitée au point A par une force concentrée P, il s'est avéré nécessaire de mesurer la déformée, c'est-à-dire, d'établir expérimentalement la loi de changement des déplacements verticaux le long de l'axe x. La forme de la poutre est à tel point compliquée que le tracé de la déformée au moyen d'un calcul recèlerait des difficultés notoires. Pour mesurer les déplacements, l'expérimentateur dispose uniquement d'un seul indicateur représenté sur la fig. 155.

Quelle est, dans ces conditions, la façon la plus facile de mesurer la déformée de la poutre si l'on sait en avance que ses flèches sont proportionnelles à la force active P?

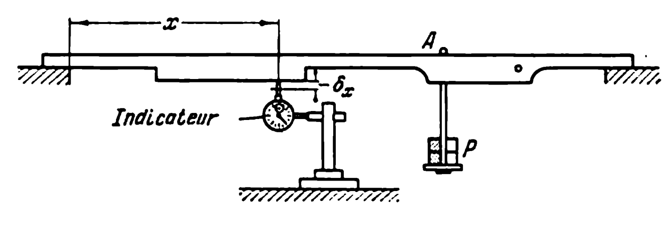


Fig. 155

174. Un cylindre plein, flexible, de hauteur H et de rayon R, reposant sur une surface rigide (fig. 156), se trouve sous l'action de son propre poids (le poids du cylindre P). Comment changera le volume du cylindre si l'on renverse ce dernier pour le faire appuyer sur sa face latérale?

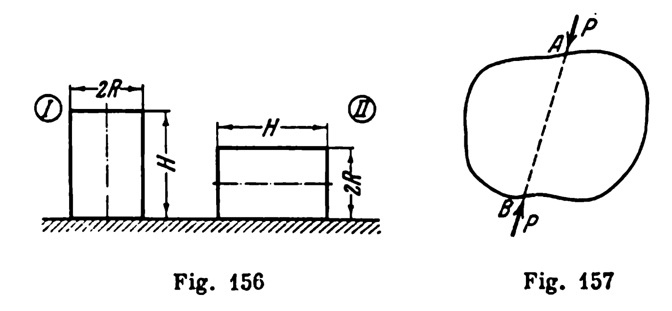


Fig. 156 Fig. 157

175. Un corps élastique de forme quelconque est soumis à la compression par deux forces égales P dirigées dans des sens opposés (fig. 157).

Déterminer la modification du volume du corps élastique.

176. L'élément le plus important dans des appareils destinés à mesurer la pression est la pièce qu'on appelle le ressort de Bourdon. Le ressort de Bourdon se présente comme un petit tube creux plié suivant un arc de cercle et ayant une section ovale ou bien une section quelconque allongée (fig. 158). Sous l'action d'une pression interne, ce tube tendra quelque peu à se redresser et le déplacement de l'extrémité du tube se transmettra à l'aiguille du manomètre par l'intermédiaire d'un mécanisme multiplicateur (fig. 159). La déviation de l'aiguille permettra de juger de la valeur de la pression mesurée.

Dans un des livres consacrés aux appareils de mesurage, nous avons trouvé l'explication suivante du principe de travail du tube de Bourdon:

« Le principe de travail du ressort de Bourdon est basé sur le fait que la pression, agissant à l'intérieur du tube sur la surface supérieure du ressort, sera plus grande que la pression agissant sur sa surface interne. Effectivement, si l'on a un tube de section transversale rectangulaire et, si l'on désigne par R_1 et R_2 les rayons exté-

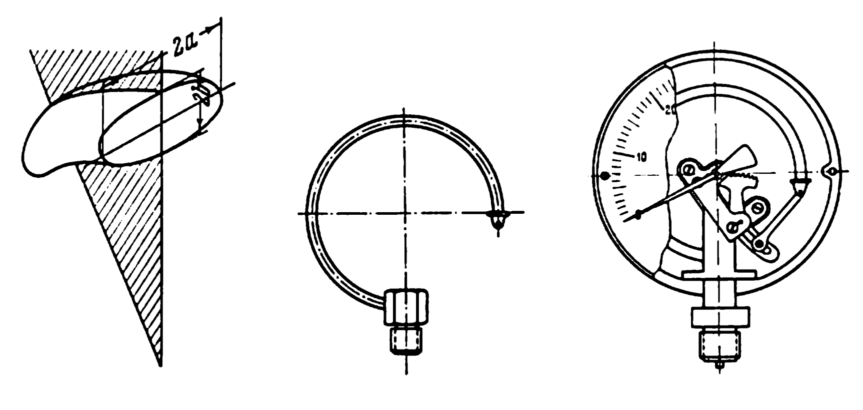


Fig. 158 Fig. 159

rieur et intérieur du tube, les surfaces externe (S_1) et interne (S_2) du tube seront égales respectivement à

$$S_1 = \frac{2\pi\varphi}{360} R_1 a \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{2\pi\varphi}{360} R_2 a,$$

où φ est l'angle central du ressort, a, sa dimension dans un plan perpendiculaire au plan du dessin, R_1 et R_2, rayons.

Sous une pression p kgf/cm², la pression générale agissant sur la surface externe est

$$P_1 = S_1 p \text{ kgf}$$

et sur la surface interne

$$P_2 = S_2 p \text{ kgf}$$

et avec cela, la force P_1 sera plus grande que la force P_2 et tendra à déplier le ressort. »

Cette explication est-elle juste?

177. Une tôle en contre-plaqué constitue l'exemple d'une plaque anisotrope. Si l'on découpe de cette tôle deux bandelettes orientées de façon différente (fig. 160) et si l'on soumet ces dernières à des essais de traction sous une même force, elles accuseront des allongements différents.

Soit E_{1p} le module d'élasticité en traction de la première bandelette et E_{2p} celui de la seconde.

Peut-on dire que les flèches f_1 et f_2 des bandelettes, lors des essais de flexion, seront dans le même rapport que E_{2p}/E_{1p} ?

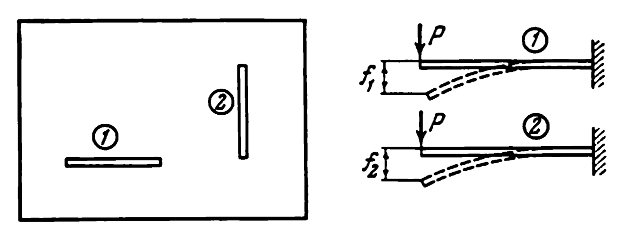


Fig. 160

178. Soit une enveloppe torique, fermée, du type chambre à air d'automobiles (fig. 161), sollicitée par une pression interne p.

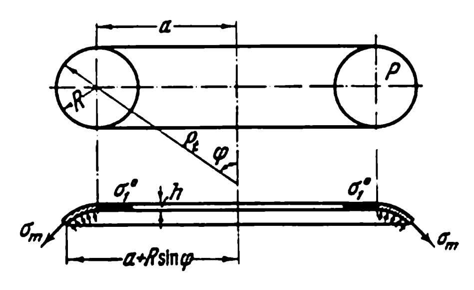


Fig. 161

Déterminons les contraintes engendrées dans cette enveloppe. De la condition d'équilibre de la partie de l'enveloppe délimitée par une section conique (fig. 161), nous aurons

$$p\pi\,[(a+R\sin\varphi)^2-a^2]=\sigma_m 2\pi\,(a+R\sin\varphi)\,h\sin\varphi,$$

$$\sigma_m=\frac{pR}{2h}\,\frac{2a+R\sin\varphi}{a+R\sin\varphi}. \tag{1}$$

La contrainte tangentielle σ_t sera trouvée à l'aide de l'équation connue

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{p}{h}.$$

Dans notre cas

$$\rho_m=R,$$

$$\rho_t=\frac{a}{\sin\varphi}+R.$$

Après substitution de ρ_m, ρ_t et σ_m nous aurons

$$\sigma_t=\frac{pR}{2h}. \tag{2}$$

Passons maintenant à la détermination des déplacements. Désignons par u le déplacement d'un point situé sur la surface médiane

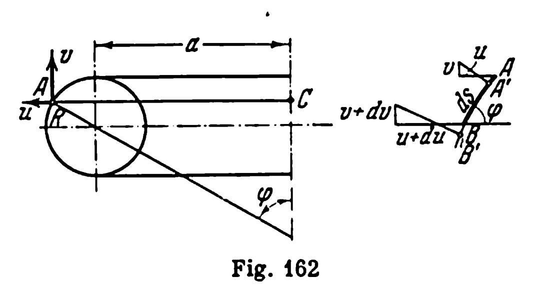


Fig. 162

dans une direction perpendiculaire à l'axe de rotation et par v le déplacement de ce même point le long de l'axe de rotation (fig. 162). L'allongement relatif dans le sens de la circonférence sera

$$\varepsilon_t = \frac{u}{AC} = \frac{u}{a + R\sin\varphi}. \tag{3}$$

L'allongement méridional

$$\varepsilon_m = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{BB' - AA'}{AB},$$

$$BB' = (u + du)\cos\varphi - (v + dv)\sin\varphi,$$

$$AA' = u\cos\varphi - v\sin\varphi,$$

$$AB = R\,d\varphi.$$

C'est pourquoi, l'allongement selon le méridien est égal à

$$\varepsilon_m = \frac{1}{R}\left(\frac{du}{d\varphi}\cos\varphi - \frac{dv}{d\varphi}\sin\varphi\right). \tag{4}$$

Par ailleurs,

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_m), \quad \varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_m - \mu\sigma_t).$$

Tenant compte des expressions (1), (2) et (3), nous aurons

$$u = \frac{pR}{2Eh}\left[a(1 - 2\mu) + R(1 - \mu)\sin\varphi\right];$$

de (4) on obtient

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{pR^2}{2Eh}(1 - \mu)\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\varepsilon_m R}{\sin\varphi} =$$

$$= \frac{pR^2}{2Eh}\left[-(1 - \mu)\sin\varphi - \frac{a}{\sin\varphi\,(a + R\sin\varphi)}\right],$$

d'où

$$v = \frac{pR^2}{2Eh}\left[(1-\mu)\cos\varphi - \ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2R}{\sqrt{a^2-R^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{a \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+R}{\sqrt{a^2-R^2}}\right)\right] + C.$$

La constante C définit le déplacement de tout le tore, pris pour un tout rigide, le long de l'axe de symétrie et peut être choisie de façon arbitraire. $\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ tend vers l'infini pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$. Par conséquent, dans ces mêmes points, le déplacement v tend aussi vers l'infini. Or, il est tout à fait évident que ce déplacement ne peut être infiniment grand. En d'autres mots, l'expression obtenue pour v ne donne pas une solution juste du problème.

Où est le hic? En quel endroit la faute a-t-elle été commise?

179. Parmi les multiples éléments de structure employés dans les constructions aéronautiques et dans la construction des fusées, on rencontre les ballons à haute pression. D'ordinaire, ils ont une forme cylindrique ou sphérique et, pour eux, comme pour toutes les autres parties des structures, il est extrêmement important de satisfaire à l'exigence de poids minimum.

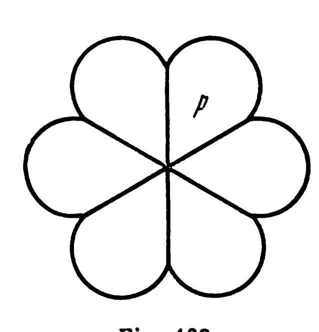


Fig. 163

L'on propose une structure en forme de cylindre, représentée sur la fig. 163. Les parois du ballon sont composées de quelques sections cylindriques reliées entre elles par des cloisons radiales. Vu que le rayon de ces sections cylindriques n'est pas grand, les contraintes engendrées en elles vont diminuer et l'on peut espérer que malgré une augmentation du poids due aux cloisons radiales, le poids total de la structure sera plus petit que dans le cas d'un cylindre simple ayant un même volume. A quel point ces espoirs sont-ils autorisés?

180. Sur un ressort (fig. 164), on place une charge de poids P. Soit c la rigidité du ressort, alors la charge se déplacera en bas d'une valeur $\lambda = P/c$. Avec cela, l'énergie potentielle de la charge (énergie de position) va diminuer de

$$P\lambda = \frac{P^2}{c}. \tag{1}$$

L'énergie potentielle du ressort en état déformé sera, par ailleurs, égale à

$$U_r = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2}{2c}, \tag{2}$$

c'est-à-dire deux fois moins l'énergie dépensée par la charge.

De quoi s'agit-il? Où a disparu une partie de l'énergie?

181. De quel angle dévient, dans le plan axial (le plan du dessin 165), les spires d'un ressort lors de la compression de ce dernier? (L'angle ψ d'après le dessin 165).

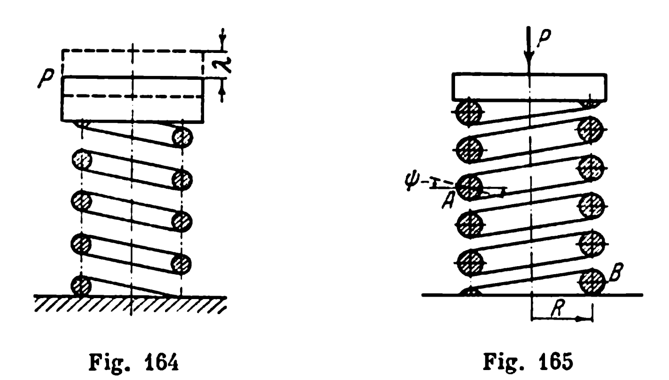


Fig. 164 Fig. 165

182. Un ressort à boudin ayant un angle d'élévation α et un rayon des spires R est soumis à la traction par des forces P. Déterminer la variation de la hauteur et du diamètre du ressort ainsi que la variation du nombre de spires.

183. Dans certains appareils, dans le but d'avoir un mode de dépendance non linéaire entre la force et le déplacement, on emploie un ressort profilé avec ajustement des spires (fig. 166).

Lors de la compression d'un tel ressort, les spires inférieures (les plus grandes) se déforment plus fortement, s'aplatissent sur la surface et cessent complètement, ou presque, de travailler. Ainsi donc, avec l'augmentation de la force de compression, le nombre de spires actives du ressort diminue et la caractéristique de ce dernier devient non linéaire (fig. 167, *a*). Le ressort a une caractéristique

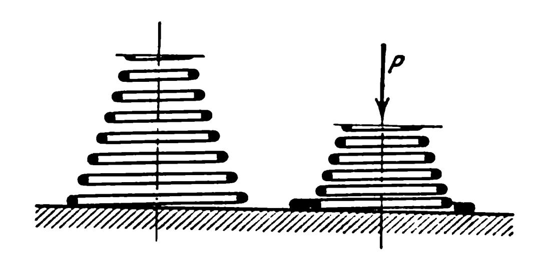


Fig. 166

qui se distingue par une rigidité croissante. La dérivée de la force par rapport au déplacement $dP/d\lambda$ croît.

Qu'en pensez-vous: comment, à l'aide du même ressort, avoir une caractéristique semblable à celle de la fig. 167, *b*, c'est-à-dire qui se distingue par une rigidité décroissante?

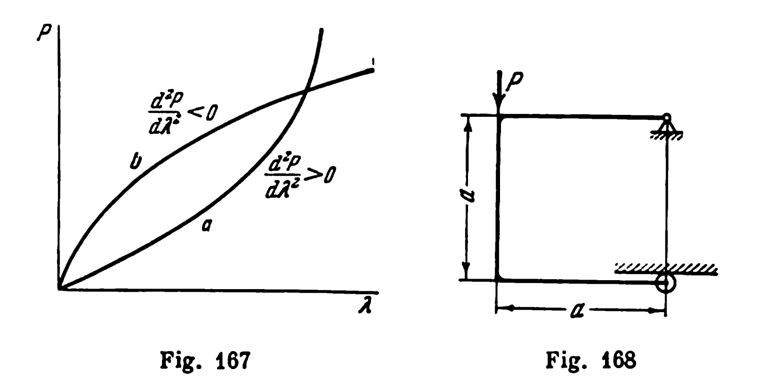


Fig. 167 Fig. 168

184. Un portique en forme de U renversé (fig. 168) est articulé à l'une de ses extrémités. A l'autre, le portique est doté d'un galet reposant sur une surface rigide.

Déterminer la réaction de l'appui inférieur en supposant que la force P et la rigidité du portique sont telles que les déplacements créés dans le portique sont petits par rapport aux dimensions initiales de ce dernier.

185. Une barre mince, flexible, est sollicitée à son extrémité par une force verticale concentrée (fig. 169). A la barre sont imposées des liaisons gênant toute flexion autre que celle se passant dans le plan d'action de la force (le plan du dessin). Quelles formes d'équilibre, à l'exception de celle indiquée, sont-elles possibles pour cette barre?

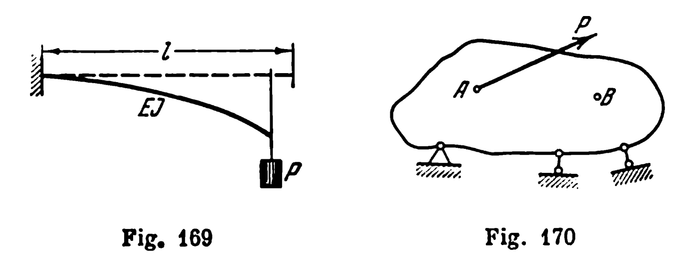


Fig. 169 Fig. 170

186. Au point A d'un certain corps élastique (fig. 170) est appliquée une force P. Quelle surface va décrire un point B pris arbitrairement si l'on oblige la force P à se retourner dans l'espace autour du point A?

187. Un anneau de section transversale ronde (fig. 171) est sollicité par des moments uniformément répartis d'intensité m kgfcm/cm.

En supposant r petit par rapport à R, déterminer l'angle φ de déviation des sections de l'anneau dans le plan axial en fonction de m. Le matériau de l'anneau obéit à la loi de Hooke.

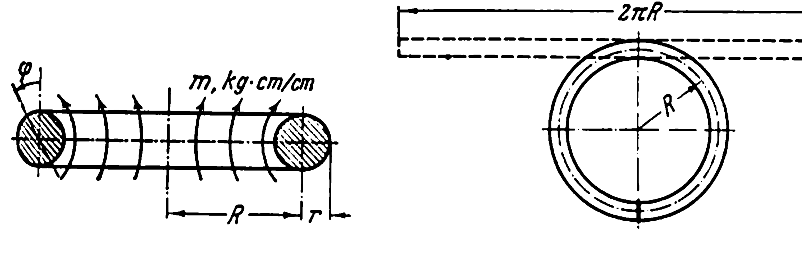


Fig. 171 Fig. 172

188. Comment va changer la solution du problème précédent si dans l'anneau en question sont conservées les contraintes qui y ont été engendrées lors de son cintrage à partir d'une barre droite (fig. 172)? L'on suppose, avec cela, que les contraintes de flexion sont entièrement élastiques.

189. Dans beaucoup d'appareils, par exemple dans le compteur de vitesse, dans le but de transmettre le moment, on emploie un arbre flexible qui se présente sous la forme d'un câble mince tournant librement dans un guipage immobile (fig. 173). Sous une rotation

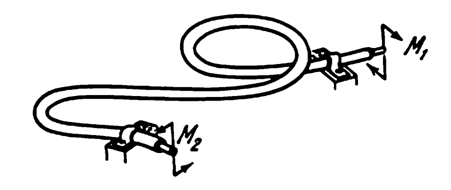


Fig. 173

uniforme d'une extrémité du câble, la seconde extrémité se met également à tourner uniformément. Cependant, dans des arbres défectueux, l'uniformité de la rotation se trouve enfreinte. La section située à la sortie tourne d'abord avec retardement, ensuite avec accélération, si bien que la vitesse angulaire à la sortie reste, en moyenne, inchangée mais, par contre, apparaît une composante variable ayant une même période de rotation que le câble. Il a été établi que ce défaut est lié à la courbure initiale qu'a le câble avant qu'il ne soit déposé dans le guipage.

Etudier le phénomène en question et établir les conditions de suppression de cette irrégularité dans le fonctionnement. Les forces de frottement du câble sur le guipage peuvent être négligées.

190. Il est bien connu que plus on tend une corde, plus augmente la fréquence de ses vibrations (la tonalité augmente).

Etudier comment va changer la fréquence des vibrations d'une corde en caoutchouc au fur et à mesure que cette dernière est tendue d'après l'une de deux variantes de sa fixation représentées à

la fig. 174, *a* et *b*. La courbe de traction de la corde est donnée à la fig. 175.

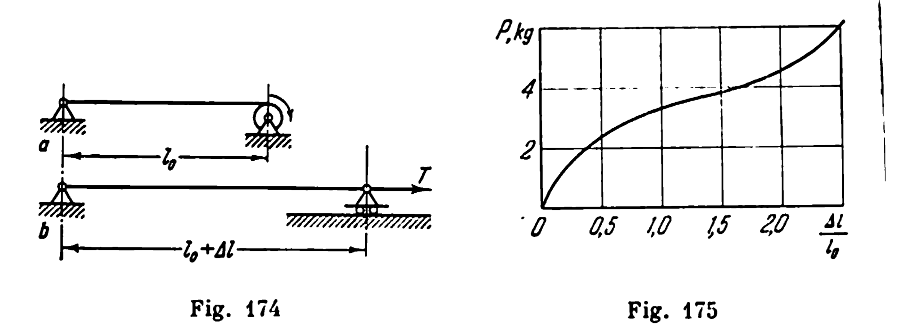


Fig. 174

Fig. 175

191. Une poutre longue est encastrée à l'une de ses extrémités. Sous l'action des forces créées par son propre poids q, elle s'affaisse sur une surface rigide située plus bas que l'encastrement d'une quantité h (fig. 176). Une tranche de la poutre de longueur l est laissée libre.

A l'extrémité droite libre de cette tranche, la poutre est encastrée et, à gauche, la partie restante libre de la surface d'appui est enlevée. Déterminer la fréquence du ton fondamental des vibrations propres de la poutre ainsi obtenue (fig. 176, *b*).

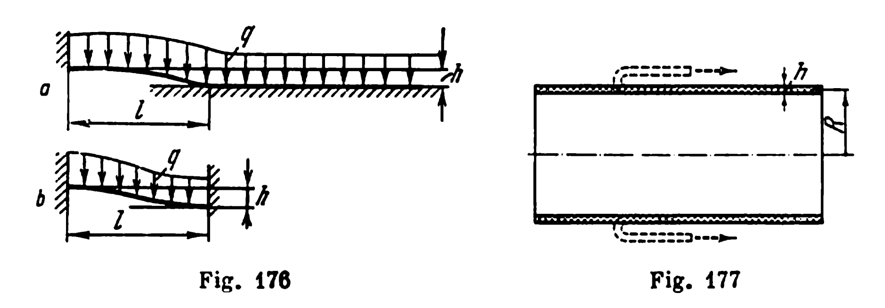


Fig. 176

Fig. 177

192. Un cylindre à parois minces, en caoutchouc, ouvert des deux côtés est retourné à l'envers (fig. 177). Quelle forme adoptera-t-il après ladite opération s'il est connu que les déformations du cylindre sont purement élastiques? On peut supposer que le caoutchouc obéit à la loi de Hooke (voir réponse à la question 168).

193. La résolution du problème de la déformation à symétrie axiale d'un cylindre à parois minces se trouvant sous l'action d'une pression interne (fig. 178) se ramène, comme on sait, à la résolution de l'équation différentielle:

$$w^{(IV)}+4k^4w=\frac{p}{D}, \qquad (1)$$

w étant le déplacement selon la normale à la surface de la paroi,

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad \text{et} \quad 4k^4=\frac{Eh}{R^2D}.$$

Si, outre la pression p, sur la paroi agit une force axiale de traction créant une contrainte axiale σ_x, on introduit dans la partie droite de l'équation un terme $\mu h\sigma_x/RD$ qui reflète une diminution de la section transversale du cylindre, laquelle est due à l'effet de Poisson; avec cela, le problème est considéré, habituellement, comme achevé. Pourtant, suite à la courbure w'' du méridien, la contrainte longitudinale σ_x donne sur la normale une force composante coïncidant en direction avec la pression p, en foi de quoi un ter-

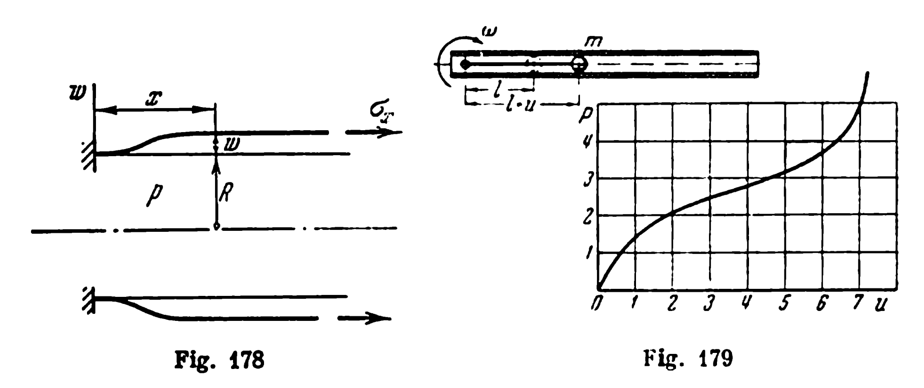


Fig. 178

Fig. 179

me $-\frac{h\sigma_x}{D}w''$ doit être introduit dans la partie gauche de l'équation. Dans ce cas, l'équation doit prendre la forme suivante:

$$w^{(IV)}-\frac{h\sigma_x}{D}w''+4k^4w=\frac{p}{D}-\frac{\mu h\sigma_x}{RD}. \qquad (1)$$

Dans quels intervalles on peut prendre pour légitime le fait généralement admis de négliger le second terme dans la partie gauche de l'équation?

194. Dans un tube tournant avec une vitesse angulaire constante ω est placée une bille de masse m. La bille est attachée à un tirant en caoutchouc (fig. 179).

Le diagramme de traction du tirant est donné par la courbe représentée à la fig. 179 (sur les coordonnées sont représentées les unités conventionnelles des forces et des déplacements). Déterminer comment le déplacement de la bille u dépend de la vitesse angulaire ω.

195. Un système de barres (fig. 180) composé de trois barres égales dotées de liaisons articulées est sollicité, dans le nœud commun, par une force P.

Déterminer le déplacement w du point O en fonction de la valeur de la force P en prenant H pour une valeur petite par rapport à l et

en supposant que le matériau des barres obéit à la loi de Hooke. Donner une interprétation du résultat obtenu.

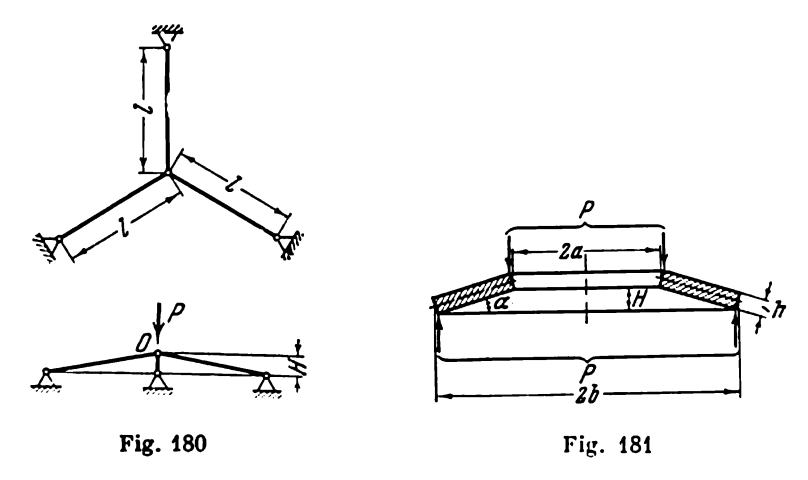


Fig. 180

Fig. 181

196. Déterminer l'aplatissement d'un ressort en forme d'assiette (fig. 181) en fonction de la force P.

En résolvant le problème, considérer le ressort comme une barre circulaire de section transversale en forme de rectangle $[h \times (b - a)]$. L'angle d'élévation du ressort α est petit; les forces P, suite au fait que l'épaisseur h et l'angle α sont petits, peuvent être considérées comme appliquées sur des circonférences de rayons a et b.

197. Etudier le problème de la stabilité et des grands déplacements du système suivant (fig. 182).

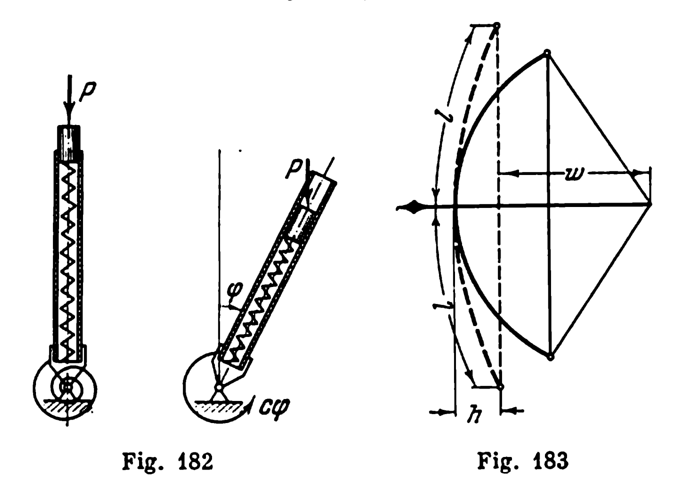


Fig. 182

Fig. 183

Un tube dispose à son extrémité inférieure d'un appui articulé et est relié à un ressort en spirale donnant, lors de la rotation du tube

d'un angle φ, un moment égal à $c\varphi$. Dans le tube sont placés un ressort et un petit piston ayant la possibilité de se déplacer dans le tube sans frottement. Le ressort placé dans le tube a une rigidité égale à c_1, c'est-à-dire, sous une force P, donne un aplatissement égal à P/c_1.

198. Déterminer comment la portée de la flèche d'un arc dépend de la valeur de tension de la corde (fig. 183). En état de non-tension de la corde, la courbature de l'arc se présente sous la forme d'une poutre droite de longueur $2l$ et de rigidité EJ.

Effectuer un calcul numérique de la vitesse de survol pour le cas:

$$l = 60 \text{ cm}, \quad h = 0{,}3l, \quad E = 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (bois)};$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64} \ (d = 2{,}0 \text{ cm}), \quad w = 0{,}6l, \text{ poids de la flèche } 40 \text{ gf}.$$

En calculant, supposer que l'énergie de l'arc tendu se transforme entièrement en énergie cinétique de la flèche; prendre la corde pour inextensible.

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES ET RÉPONSES AUX QUESTIONS

I. TRACTION, COMPRESSION ET TORSION

1. Le déplacement total sera, naturellement, déterminé non pas par la diagonale du parallélogramme construit à la base des segments u_1 et u_2, comme il arrive très souvent de l'entendre dire en guise de réponse à la question posée, mais bien par la longueur du segment mesuré du point A jusqu'au point d'intersection des perpendiculaires élevées à partir des extrémités des segments u_1 et u_2 (le point B sur la fig. 184).

Cette solution est basée sur le fait que le déplacement dans une direction donnée est la projection du déplacement total sur ladite direction.

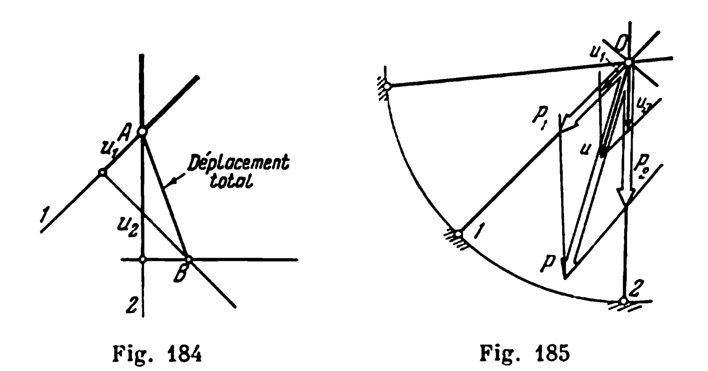


Fig. 184 Fig. 185

2. Décomposons la force P en composantes P_1 et P_2 selon les directions des deux barres avoisinantes *1* et *2* (fig. 185). Comme chacune de ces deux barres est située dans le plan de symétrie, les déplacements totaux u_1 et u_2 dus aux forces P_1 et P_2 seront dirigés selon les lignes d'action des forces correspondantes, le long des barres *1* et *2*.

Les coefficients de rigidité c sont identiques pour les directions *1* et *2*, par conséquent,

$$u_1 = \frac{P_1}{c}, \quad u_2 = \frac{P_2}{c}.$$

Ainsi, le déplacement total u obtenu en additionnant les déplacements u_1 et u_2 selon la règle du parallélogramme va passer par la ligne d'action de la force P et aura une valeur de

$$u = \frac{P}{c}$$

indépendante de l'angle α.

Comparant la solution de ce problème avec celle du problème précédent, il est important de remarquer que les déplacements u_1 et u_2 représentent, dans le cas présent, les déplacements *totaux* dus aux forces P_1 et P_2 respectivement. C'est pourquoi, sous l'action simultanée des forces, les déplacements u_1 et u_2 s'additionnent selon la règle du parallélogramme. Dans le problème précédent, par contre, u_1 et u_2 étaient des projections, sur les directions *1* et *2*, du déplacement total dû à l'action combinée des forces P_1 et P_2. C'est pourquoi, elles s'additionnent autrement.

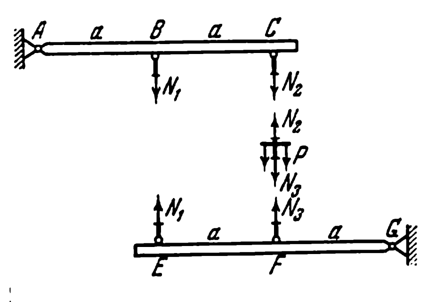


Fig. 186

3. Le système est isostatique.

Trouvons les efforts à partir des conditions d'équilibre des éléments du système (fig. 186). Pour les poutres rigides, annulons les sommes des moments des forces par rapport aux points A et G:

$$2N_2 + N_1 = 0, \quad 2N_1 + N_3 = 0;$$

pour la barre CF, il est évident que

$$N_2 = P + N_3,$$

d'où

$$N_1 = \frac{2}{3} P, \quad N_2 = -\frac{1}{3} P, \quad N_3 = -\frac{4}{3} P.$$

4. Dans le cas d'une plaque rigide, avant l'ouverture des contacts, la longueur du boulon en traction AB reste inchangée. C'est-à-dire que la force de serrage reste également constante. Dans le cas où P est plus grande que la force de précontrainte, le contact entre la plaque et le gousset va s'ouvrir. La force de serrage du boulon sera alors égale à P.

Ainsi donc, pour $P \leqslant N_0$, la force de serrage du boulon est de $N = N_0$, mais pour $P \geqslant N_0$, elle sera de $N = P$. La véracité du résultat obtenu s'illustre bien par l'exemple simple suivant.

Représentez-vous une balance à ressort (fig. 187) dont nous accrochons l'anneau supérieur à un clou ; quant au crochet d'en bas, attachons-le, en tirant, sur une quelconque partie saillante rigide, par exemple sur l'extrémité d'une table comme le montre la fig. 187. Après cela, la balance présentera une certaine indication de mesure,

par exemple 4 kgf. Nous pouvons établir une comparaison entre cette balance et un boulon en traction. Maintenant, mettons-nous à déposer des poids sur le crochet d'en bas de cette balance tendue. Tant que le poids de la charge sera inférieur à la force avec laquelle la balance est tendue, l'indicateur de la balance montrera, constamment, quatre kilogrammes. Ce n'est que quand sur le crochet se trouvera un poids plus grand que quatre kilogrammes que l'indicateur bougera et montrera le poids correspondant.

5. Pour résoudre le problème, considérons séparément le boulon et le joint. Désignons par P_A l'effort de compression du joint; l'effort agissant sur le bout du boulon du côté de la plaque, quant à lui, par P_B (fig. 188).

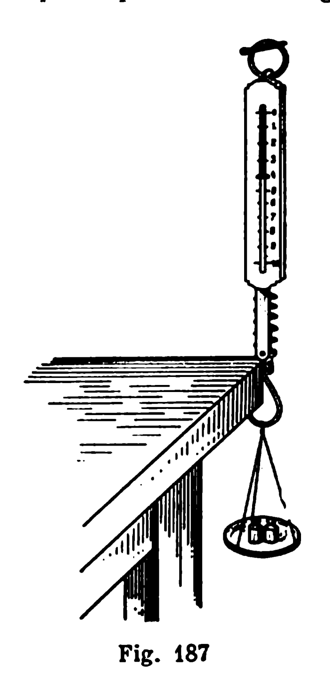


Fig. 187

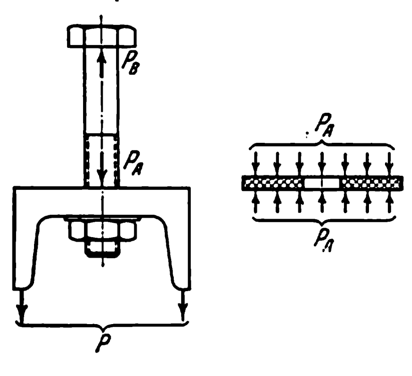


Fig. 188

Tant qu'en bas le contact sera empêché, la somme de l'allongement du boulon et du raccourcissement du joint

$$\frac{P_B l}{EF}+\frac{P_A}{c}$$

reste constante et égale à la somme de ces mêmes valeurs sous le serrage (c'est-à-dire sous $P = 0$); cette dernière sera, évidemment, égale à

$$\frac{N_0 l}{EF}+\frac{N_0}{c},$$

où F est la surface de la section du boulon. Ainsi donc,

$$\frac{P_B l}{EF}+\frac{P_A}{c}=\frac{N_0 l}{EF}+\frac{N_0}{c}.$$

En plus de cela, nous aurons l'égalité suivante

$$P_B-P_A=P.$$

En partant de ces deux équations, trouvons

$$P_A = N_0 - \frac{P}{1+\frac{EF}{cl}}, \quad P_B = N_0 + \frac{P\frac{EF}{cl}}{1+\frac{EF}{cl}}.$$

L'effort N_0 de traction du boulon sera égal à P_B ; pour

$$P = N_0\left(1+\frac{EF}{cl}\right)$$

nous aurons $P_A = 0$ et en bas il n'y aura plus de contact. On aura, alors, $N = P$. Pour $c = \infty$, c'est-à-dire en cas d'un joint rigide, nous en venons à la solution du problème précédent.

Sur la fig. 189 est représentée la courbe de variation de la force N de traction du boulon en fonction de P pour différents c:

$$c_2 < c_1 < \infty.$$

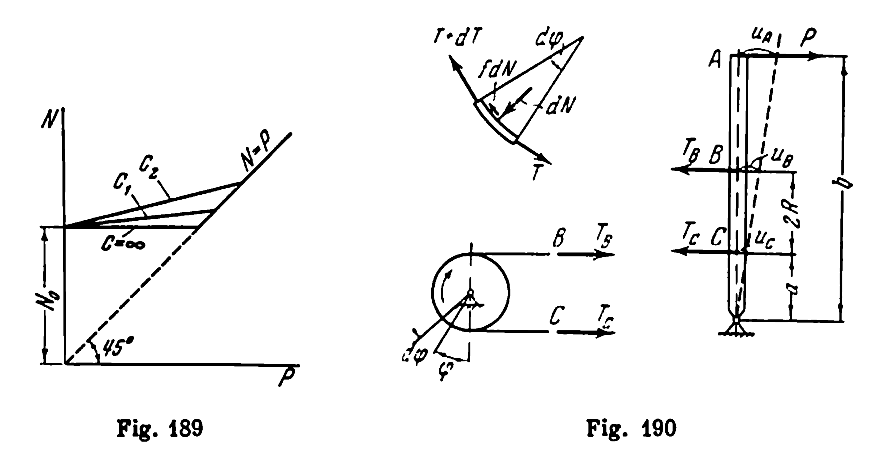


Fig. 189 Fig. 190

6. Pratiquons mentalement dans une courroie des sections B et C et étudions les conditions d'équilibre de la courroie et de la manette (fig. 190).

Il est évident que pour la manette on peut écrire l'égalité suivante :

$$T_C a + T_B(a+2R) = Pb.$$

Découpons de la courroie une tranche de longueur $Rd\varphi$ (fig. 190). Sur cette tranche agissent les forces T et $T + dT$, la réaction normale de la poulie dN, ainsi que la force de frottement fdN. Des conditions d'équilibre de la tranche de la courroie tirons

$$dT + fdN = 0,$$

$$dN = Td\varphi,$$

d'où, nous trouvons

$$\frac{dT}{T} = -f\,d\varphi.$$

En intégrant, nous aurons

$$T = Ce^{-f\varphi}.$$

Sous $\varphi = 0$ nous aurons $T = T_C$ et c'est pourquoi $C = T_C$ et $T = T_C e^{-f\varphi}$.

L'effort T_B est égal à

$$T_B = T_{\varphi=\pi} = T_C e^{-f\pi}.$$

De la condition (1), déterminons T_C:

$$T_C = \frac{Pb}{a + e^{-f\pi}(a+2R)}.$$

Trouvons maintenant le moment de freinage

$$M = Rf\int_0^\pi dN = Rf\int_0^\pi T_C e^{-f\varphi}\,d\varphi = T_C R\left(1-e^{-f\pi}\right) = \frac{PbR\left(1-e^{-f\pi}\right)}{a+e^{-f\pi}(a+2R)}.$$

Avant de calculer le déplacement du point A, déterminons au préalable l'allongement total Δl de la courroie:

$$\Delta l = \frac{T_C c}{EF} + \frac{T_B c}{EF} + \int_0^\pi \frac{TR\,d\varphi}{EF} = \frac{T_C}{EF}\left[c + ce^{-f\pi} + \frac{R}{f}\left(1-e^{-f\pi}\right)\right]$$

Mais

$$\Delta l = u_B + u_C,$$

où u_B et u_C sont les déplacements des points B et C. En plus de cela, de la fig. 190 il ressort que

$$u_A = u_C\frac{b}{a}, \quad u_A = u_B\frac{b}{a+2R}.$$

c'est pourquoi

$$\Delta l = u_A\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a+2R}{a}\right)$$

et

$$u_A = \frac{b}{2(a+R)}\,\frac{T_C}{EF}\left[c + ce^{-f\pi} + \frac{R}{f}\left(1-e^{-f\pi}\right)\right].$$

En définitive, nous aurons

$$u_A = \frac{P}{EF}\,\frac{b^2}{2(a+R)}\,\frac{c\left(1+e^{-f\pi}\right) + \frac{R}{f}\left(1-e^{-f\pi}\right)}{a+(a+2R)\,e^{-f\pi}}.$$

7. Quand une poulie tourne dans une direction opposée, les forces de frottement changent de signe. Pour ce cas, il est plus facile d'obtenir la solution en changeant, dans les expressions définitives,

le signe du coefficient de frottement f en son contraire. Le moment de freinage M et le déplacement u_A auront respectivement de nouvelles valeurs, différentes de celles trouvées plus haut.

8. Dans le schéma indiqué, les indicateurs montrent non pas les mesures du raccourcissement de l'échantillon, mais bien la somme de ce raccourcissement et du déplacement, l'une par rapport à l'autre, des extrémités des plaques (fig. 191), c'est-à-dire la quantité $\Delta l + \delta_1 + \delta_2$. A cause de cela, le module d'élasticité obtenu doit être plus petit que le véritable. La faute relative sera d'autant plus grande que plus grand sera le module d'élasticité de l'échantillon soumis à l'essai.

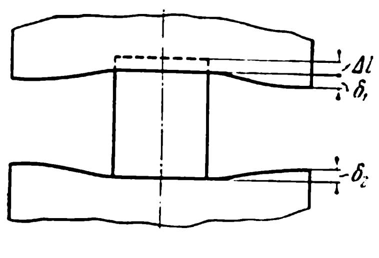


Fig. 191

La technique des essais décrite est valable uniquement pour la détermination des propriétés élastiques de la résine, des matières plastiques ou du bois, c'est-à-dire des matériaux dont le module d'élasticité est sensiblement plus petit que celui de l'acier. Comme la valeur obtenue pour le module d'élasticité du matériau analysé dans le problème est du même ordre que le module d'élasticité de l'acier, on ne peut donc pas donner foi au résultat obtenu.

9. A cause des conditions de symétrie, il n'y aura pas de déplacements axiaux dans une section située au milieu de la barre. Considérons maintenant soit la partie droite soit la partie gauche de la barre. Dans cette partie de la barre, il n'y a pas de déplacements aux bords; la barre étant homogène et l'échauffement uniforme. C'est pourquoi, à cause des conditions de symétrie, au milieu de cette partie de la barre, il n'y aura pas non plus de déplacements. En raisonnant ainsi, on peut diviser la barre en parties aussi petites que l'on voudra aux extrémités desquelles les déplacements seront nuls. De là on peut tirer cette conclusion-ci que pour toutes les sections de la barre les déplacements axiaux sont toujours nuls.

10. La première expression pour U est juste. La seconde est fausse. Dans le cas présent, le travail effectué par la force P

$$U \neq \frac{P\delta}{2},$$

puisque le déplacement δ n'est pas proportionnel à P sur toute l'étendue. On peut facilement s'en rendre compte à l'aide de la fig. 192 sur laquelle est représentée la dépendance de δ par rapport à P pour le système en question. Le travail effectué par la force P est déterminé par l'aire hachurée, c'est-à-dire

$$U = \frac{\Delta^2 EF}{2l} + \left(\frac{Pl}{2EF} - \frac{\Delta}{2}\right)\frac{EF\Delta}{l} + \\ + \frac{1}{2}\left(P - \frac{EF\Delta}{l}\right)\left(\frac{Pl}{2EF} - \frac{\Delta}{2}\right) = \frac{P^2 l}{4EF} + \frac{EF\Delta^2}{4l};$$

cette expression coïncide avec celle obtenue auparavant [cf. expression (1)].

11. Dans le premier cas, on a déterminé le déplacement du point sur lequel se trouvait le centre de gravité de la barre avant la déformation. Dans le second cas, la distance à partir du point de la nouvelle position du centre de gravité jusqu'à l'ancienne, ce qui n'est pas la même chose.

Ainsi donc, dans la façon même de poser le problème, il y a une indétermination. Il faut clairement indiquer ce qu'il convient de comprendre par l'expression « déplacement du centre de gravité », puisque le centre de gravité n'est fixé rigidement sur aucun des points d'un corps en déformation.

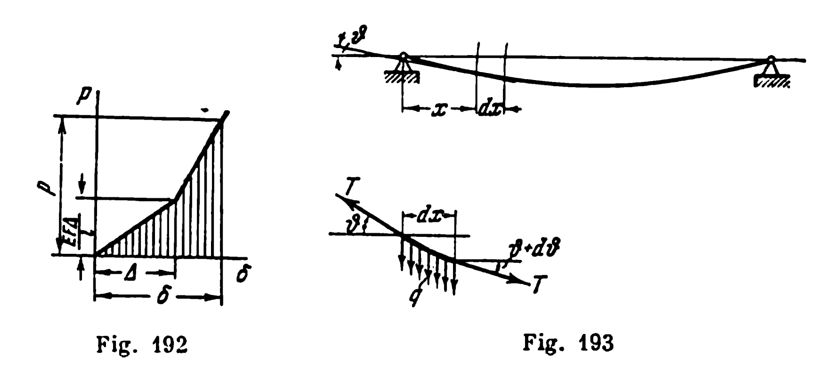


Fig. 192 Fig. 193

12. Soit un élément du fil de longueur dx (fig. 193). Désignons par T la force de tension du fil tendu ($T > T_0$) et par ϑ l'angle d'inclinaison du fil tendu. En supposant cet angle petit, nous aurons à partir des conditions d'équilibre:

$$T\vartheta - qdx - T(\vartheta + d\vartheta) = 0,$$

d'où

$$\frac{q}{T} = -\frac{d\vartheta}{dx}.$$

Après le calcul de l'intégrale, nous trouvons

$$\vartheta = \frac{q}{T}(C - x);$$

sous $x = l/2$, nous aurons $\vartheta = 0$, c'est pourquoi $C = l/2$; par conséquent,

$$\vartheta = \frac{q}{T}\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad (1)$$

et

$$w_{max} = \int_0^{l/2} \vartheta\, dx = \frac{ql^2}{8T}. \quad (2)$$

Déterminons maintenant T. Suite à l'inégalité des efforts T et T_0, le fil s'allonge d'une valeur égale à la différence des longueurs entre la courbe et le fil en position droite, c'est-à-dire

$$\frac{(T-T_0)l}{EF}=\int_0^l \left(\frac{1}{\cos\vartheta}-1\right)dx=\int_0^l \frac{\vartheta^2}{2}dx,$$

de là

$$\frac{T-T_0}{EF}=\frac{q^2l^2}{24T^2}.$$

Substituons dans cette équation la valeur de T tirée de l'expression (2). Nous obtiendrons alors

$$64\left(\frac{w_{\max}}{l}\right)^3+24\frac{w_{\max}}{l}\frac{T_0}{EF}=3\frac{ql}{EF}.$$

C'est là la dépendance cherchée de $w_{\max}$ par rapport à T_0 et q. Le résultat obtenu est représenté graphiquement sur la fig. 194 sous for

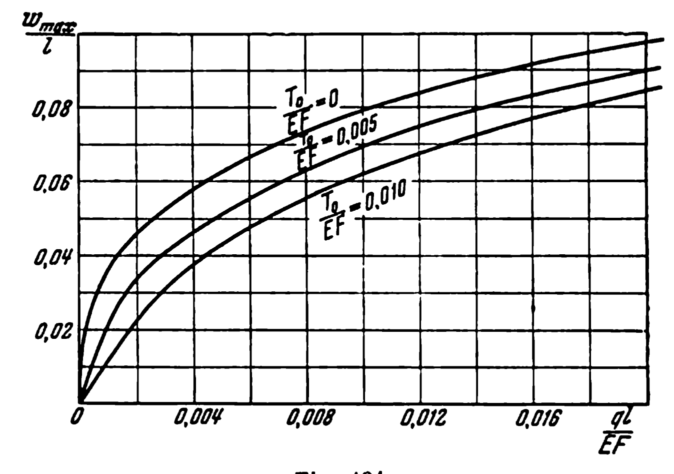


Fig. 194

me des courbes

$$\frac{w_{\max}}{l}=f\left(\frac{T_0}{EF};\ \frac{ql}{EF}\right).$$

13. Le problème se ramène au calcul d'un fil sollicité par deux forces concentrées $P = q_c l/3$ (fig. 195).

En s'aidant des expressions (1) et (2) du problème précédent, on peut écrire :

$$\vartheta_0=\frac{q}{T_0}\left(\frac{l}{2}-x\right),\qquad T_0=\frac{ql^2}{8w_{0\,\max}},$$

où ϑ_0 et T_0 sont respectivement l'angle d'inclinaison de la courbe de la flèche et la force de tension du câble avant la suspension du fil inférieur.

Considérons la partie gauche du fil (*1*) ainsi que la moitié de sa partie du milieu (*2*) (fig. 195). Pour ces parties, nous aurons respec-

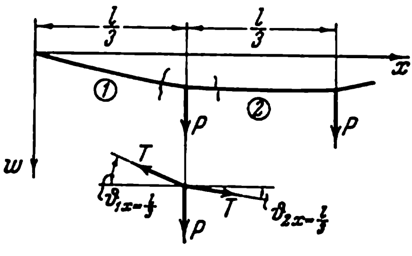


Fig. 195

tivement :

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{q}{T}(C_1 - x); \\ w_1 &= \frac{q}{T}\left(A_1 + C_1 x - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{3}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_2 &= \frac{q}{T}(C_2 - x); \\ w_2 &= \frac{q}{T}\left(A_2 + C_2 x - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \left(\frac{l}{3} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right).$$

Les constantes A_1, A_2, C_1 et C_2 se déterminent à partir des conditions suivantes:

pour $x = 0$ $\quad w_1 = 0$, $\quad$ pour $x = l/2$ $\quad \vartheta_2 = 0$,

pour $x = l/3$ $\quad w_1 = w_2$, $\quad$ pour $x = l/3$ $\quad T\vartheta_1 - T\vartheta_2 = P$.

Dans ces conditions,

$$A_1 = 0, \ A_2 = Pl/3q, \ C_1 = P/q + l/2, \ C_2 = l/2.$$

L'effort T s'obtient en établissant l'égalité entre, d'une part, la différence des longueurs du fil suspendu librement et du fil tendu et, d'autre part, l'allongement du fil en traction :

$$\int_0^{l/3}\left(1 + \frac{\vartheta_1^2}{2}\right)dx + \int_{l/3}^{l/2}\left(1 + \frac{\vartheta_2^2}{2}\right)dx - \int_0^{l/2}\left(1 + \frac{\vartheta_0^2}{2}\right)dx = \frac{(T - T_0)\,l}{2EF},$$

ou, après substitution des valeurs de ϑ,

$$\frac{q^2}{T^2}\int_0^{l/3}(C_1 - x)^2\,dx + \frac{q^2}{T^2}\int_{l/3}^{l/2}(C_2 - x)^2\,dx - \frac{q^2}{T_0^2}\int_0^{l/2}(l/2 - x)^2\,dx =$$

$$= \frac{(T - T_0)\,l}{EF},$$

de là, après avoir intégré, nous trouvons

$$\frac{q^2}{T^2}\left(\frac{P^2}{q^2}\frac{l}{3}+\frac{P}{q}\frac{2l^2}{9}+\frac{l^3}{24}\right)-\frac{q^2}{T_0^2}\frac{l^3}{24}=\frac{(T-T_0)\,l}{EF}.$$

Après substitution de T_0 nous aurons

$$\left(\frac{Tw_{0\,\max}}{ql^2}\right)^3+\left(\frac{Tw_{0\,\max}}{ql^2}\right)^2\left[\frac{8}{3}\,\frac{EFw_{0\,\max}^3}{ql^4}-\frac{1}{8}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{EFw_{0\,\max}^3}{ql^4}\left(\frac{P^2}{q^2l^2}+\frac{2}{3}\,\frac{P}{ql}+\frac{1}{8}\right).$$

Effectuons une appréciation numérique:

$$P = q_c l/3 = 1{,}5\ \ ql/3,\ P/ql = 0{,}5;$$

$$q = 0{,}6\cdot 0{,}0078 = 0{,}00468\ \ \text{kgf/cm},$$

où 0,0078 kgf/cm³ est le poids spécifique de l'acier ; ainsi nous aurons

$$\frac{EFw_{0\,\max}^3}{ql^4}=0{,}0205.$$

Dans ces conditions, l'équation de calcul se ramène à la suivante

$$\left(\frac{Tw_{0\,\max}}{ql^2}\right)^3-0{,}0704\left(\frac{Tw_{0\,\max}}{ql^2}\right)^2-0{,}00484=0,$$

d'où

$$\frac{Tw_{0\,\max}}{ql^2}=0{,}196,\quad T=460\ \text{kgf}.$$

Les équations de la courbe de suspension (w_1 pour la partie extrême

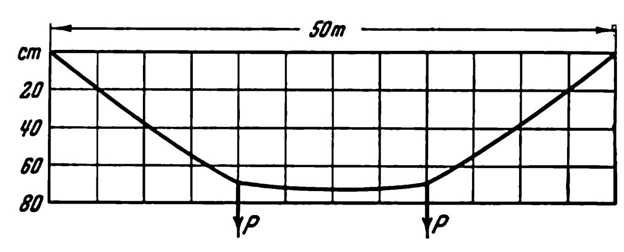


Fig. 196

et w_2 pour la partie du milieu) prennent la forme suivante

$$w_1=254\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{l^2}\right)\ \text{cm},$$

$$w_2=254\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\,\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{l^2}\right)\ \text{cm}.$$

La courbe de suspension tracée à la base de ces équations est représentée à la fig. 196.

14. Si à l'endroit du rivet, les tôles étaient reliées sur toute la largeur b et si cette liaison était parfaitement rigide, nous aurions pour les tôles soumises à des essais de traction, en conformité avec la loi de Hooke,

$$\Delta a_0 = \frac{T\frac{a}{2}}{E2bh_1} + \frac{T\frac{a}{2}}{Ebh_2}, \tag{1}$$

où E est le module d'élasticité des tôles. La valeur obtenue Δa_0 serait plus petite que la valeur mesurée Δa.

La différence entre la valeur mesurée et celle obtenue par calculs (1) est le résultat de la déformation du rivet ainsi que des tôles dans la zone de liaison. Désignons par Δ cette différence entre les allongements:

$$\Delta = T\left(\frac{1}{k} - \frac{a}{4Ebh_1} - \frac{a}{2Ebh_2}\right).$$

Désignons également

$$\frac{1}{k} - \frac{a}{4Ebh_1} - \frac{a}{2Ebh_2} = \frac{1}{k_0}. \tag{2}$$

La différence entre les allongements deviendra alors $\Delta = \frac{T}{k_0}$.

Considérons maintenant la déformation des tôles (fig. 197). Désignons par N_i la force normale de traction dans la travée i de la

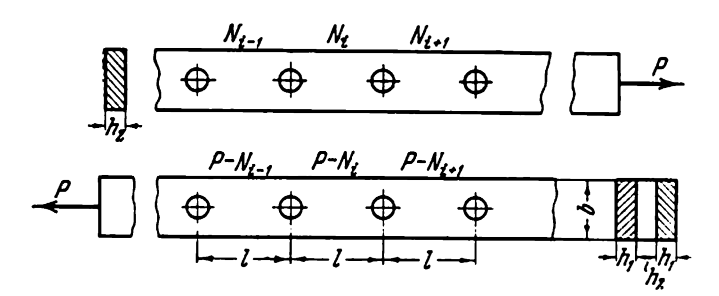


Fig. 197

tôle de l'intérieur. Dans les deux tôles externes, la force totale sera évidemment égale à la différence $P - N_i$ (cf. fig. 197). La différence entre les allongements de la tôle de l'intérieur et de celles externes sur la travée i

$$\frac{N_i l}{Ebh_2} - \frac{(P - N_i)\,l}{2Ebh_1}$$

est égale à la différence entre les déplacements des extrémités de la travée, déplacements dus à la déformation des rivets, c'est-à-dire

$$\frac{N_{i+1} - N_i}{k_0} - \frac{N_i - N_{i-1}}{k_0}$$

où $N_i - N_{i-1}$ et $N_{i+1} - N_i$ sont les efforts revenant respectivement au rivet de gauche et à celui de droite dans la travée i.

En établissant l'égalité entre les différences de déplacements obtenues, nous avons

$$N_{i-1}\alpha - N_i\beta + N_{i+1}\alpha = - P, \tag{3}$$

où

$$\alpha = \frac{2Ebh_1}{lk_0}, \quad \beta = 2\alpha + 1 + \frac{2h_1}{h_2}. \tag{4}$$

L'équation obtenue offre des analogies avec l'équation connue des trois moments; transcrivons-la successivement pour la première, la deuxième et la troisième travée (fig. 13):

$$0\cdot\alpha - N_1\beta + N_2\alpha = -P,$$
$$N_1\alpha - N_2\beta + N_3\alpha = -P,$$
$$N_2\alpha - N_3\beta + P\alpha = -P.$$

De là nous obtenons les formules pour les forces normales:

$$N_1 = P\frac{\beta^2 + \alpha^3 + \alpha\beta}{\beta(\beta^2 - 2\alpha^2)},$$
$$N_2 = P\frac{\beta(\beta + 2\alpha + \alpha^2)}{\beta(\beta^2 - 2\alpha^2)},$$
$$N_3 = P\frac{\beta^2(1+\alpha) - \alpha^3 + \alpha\beta}{\beta(\beta^2 - 2\alpha^2)}.$$

Les efforts revenant aux rivets seront les suivants:

$$P_{\mathrm{I}} = N_1 = P\frac{\beta^2 + \alpha^3 + \alpha\beta}{\beta(\beta^2 - 2\alpha^2)},$$
$$P_{\mathrm{II}} = N_2 - N_1 = P\frac{\alpha(\beta + \alpha\beta - \alpha^2)}{\beta(\beta^2 - 2\alpha^2)},$$
$$P_{\mathrm{III}} = N_3 - N_2 = P\frac{\alpha(\beta^2 - \beta\alpha - \alpha^2 - \beta)}{\beta(\beta^2 - 2\alpha^2)},$$
$$P_{\mathrm{IV}} = P - N_3 = P\left[1 - \frac{\beta^2(1+\alpha) - \alpha^3 + \alpha\beta}{\beta(\beta^2 - 2\alpha^2)}\right].$$

Dans le cas où $h_2 = 2h_1$, nous aurons

$$\beta = 2(\alpha + 1);$$

les efforts seront alors

$$P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{IV}} = \frac{P}{4}\,\frac{\alpha^3 + 6\alpha^2 + 10\alpha + 4}{(\alpha+1)(\alpha^2 + 4\alpha + 2)},$$
$$P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{III}} = \frac{P}{4}\,\frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

Si l'appui est parfaitement rigide ($k_0 = \infty$), le coefficient $\alpha = 0$ et nous obtiendrons

$$P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{IV}} = \frac{P}{2}, \quad P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{III}} = 0.$$

Par conséquent, dans ce cas, ce ne sont que les rivets extrêmes du joint qui travaillent.

Dans le cas des rivets très déformables, k_0 sera petit et α grand. A la limite, pour $\alpha \to \infty$ nous aurons

$$P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{III}} = P_{\mathrm{IV}} = \frac{P}{4}.$$

Dans les données du problème il avait été indiqué que le coefficient k est déterminé à partir des essais des tôles rivetées sous une base de mesurages a suffisamment grande pour que les contraintes dans les sections A et B puissent être considérées comme uniformément distribuées (fig. 14). Dans ce sens, le résultat obtenu sera d'une exactitude suffisante si la distance entre les rivets n'est pas plus petite que a. Cependant, même pour une différence plus petite entre les rivets, lorsque les contraintes sur la largeur ne se nivèlent pas d'un rivet à l'autre, la solution reste juste. Changera uniquement l'expression (2), pour k_0, dans laquelle la largeur de la tôle b devra être remplacée par une certaine valeur ramenée qui lui sera équivalente.

15. Soit n rivets dans un joint longitudinal. D'après l'expression (3) (p. 87), selon le nombre de travées, nous aurons $n - 1$ équations suivantes:

$$\begin{aligned}
-N_1\beta + N_2\alpha &= -P, \\
N_1\alpha - N_2\beta + N_3\alpha &= -P, \\
N_2\alpha - N_3\beta + N_4\alpha &= -P, \\
&\dots\dots\dots \\
N_{i-1}\alpha - N_i\beta + N_{i+1}\alpha &= -P, \\
&\dots\dots\dots \\
N_{n-2}\alpha - N_{n-1}\beta &= -P(1+\alpha).
\end{aligned}$$

De ces équations il faut déterminer les inconnues

$$N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{n-1}.$$

Remarquons que si l'on pose

$$N_1 = N_2 = N_3 = \ldots = N_{n-1} = -\frac{P}{2\alpha - \beta},$$

toutes les équations seront satisfaites à l'exception de la première et de la dernière.

Posons ensuite que

$$N_1 = Ax - \frac{P}{2\alpha - \beta}, \quad N_2 = Ax^2 - \frac{P}{2\alpha - \beta},$$

$$N_i = Ax^i - \frac{P}{2\alpha - \beta}, \ldots,$$

où A et x sont certaines constantes arbitraires.

Choisissons x de telle façon que toutes les équations soient de nouveau satisfaites à l'exception de la première et de la dernière. Après avoir placé N_{i-1}, N_i et N_{i+1} dans l'équation

$$N_{i-1}\alpha - N_i\beta + N_{i+1}\alpha = -P,$$

nous aurons

$$Ax^{i-1}\alpha - \frac{P\alpha}{2\alpha - \beta} - \beta Ax^i + \frac{P\beta}{2\alpha - \beta} + Ax^{i+1}\alpha - \frac{P\alpha}{2\alpha - \beta} = -P,$$

ou

$$\alpha - \beta x + \alpha x^2 = 0,$$

d'où nous trouvons

$$x_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha^2}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha^2}}{2\alpha}.$$

Il est évident maintenant que toutes les équations, à l'exception de la première et de la dernière, vont satisfaire aux expressions suivantes:

$$N_1 = Ax_1 + Bx_2 - \frac{P}{2\alpha - \beta},$$

$$N_2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 - \frac{P}{2\alpha - \beta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_i = Ax_1^i + Bx_2^i - \frac{P}{2\alpha - \beta}$$

pour n'importe quelles valeurs des constantes arbitraires A et B. Quant à ces dernières, choisissons-les de telle sorte que soient satisfaites la première et la dernière équation du système

$$-\beta\left(Ax_1 + Bx_2 - \frac{P}{2\alpha - \beta}\right) + \alpha\left(Ax_1^2 + Bx_2^2 - \frac{P}{2\alpha - \beta}\right) = -P,$$

$$\alpha\left(Ax_1^{n-2} + Bx_2^{n-2} - \frac{P}{2\alpha - \beta}\right) - \beta\left(Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1} - \frac{P}{2\alpha - \beta}\right) =$$
$$= -P(\alpha + 1).$$

De là déterminons A et B en tenant compte que $x_1x_2 = 1$ et $x_1 + x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$; après des transformations assez simples, nous obtenons:

$$N_i = \frac{P}{2\alpha - \beta}\left[\frac{(\beta - 1 - 2\alpha)(x_1^i - x_2^i) + x_2^{n-i} - x_1^{n-i}}{x_2^n - x_1^n} - 1\right].$$

Les efforts dans les rivets sont égaux à

$$P_{\text{I}} = N_1,$$
$$P_{\text{II}} = N_2 - N_1,$$
$$P_{\text{III}} = N_3 - N_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$P_n = P - N_{n-1}.$$

16. Considérons les conditions d'équilibre d'une portion de la vis

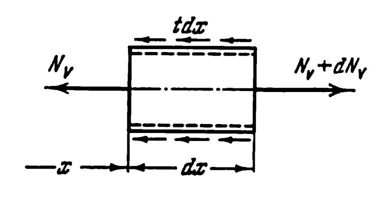


Fig. 198

(fig. 198). De toute évidence,

$$\frac{dN_v}{dx} = t. \tag{1}$$

Ensuite, d'après les données,

$$t = k\,(u_v - u_é) \tag{2}$$

mais,

$$\frac{du_v}{dx} = \varepsilon_v, \qquad \frac{du_é}{dx} = \varepsilon_é$$

et

$$\varepsilon_v = \frac{N_v}{E_v F_v}, \qquad \varepsilon_é = \frac{N_é}{E_é F_é}.$$

Par conséquent, après avoir calculé la dérivée de l'expression (2), nous aurons

$$\frac{dt}{dx} = k\left(\frac{N_v}{E_v F_v} - \frac{N_é}{E_é F_é}\right).$$

En substituant ici à t sa valeur de l'équation d'équilibre (1), nous aurons

$$\frac{d^2 N_v}{dx^2} = k\left(\frac{N_v}{E_v F_v} - \frac{N_é}{E_é F_é}\right).$$

S'étant servi de la condition

$$N_é = P - N_v,$$

trouvons

$$\frac{d^2N_v}{dx^2}-\alpha^2N_v=-\frac{kP}{E_éF_é}, \tag{3}$$

où

$$\alpha^2=k\left(\frac{1}{E_vF_v}+\frac{1}{E_éF_é}\right).$$

La solution de l'équation homogène

$$\frac{d^2N_v}{dx^2}-\alpha^2N_v=0$$

sera

$$N_v=A\,\text{sh}\,\alpha x+B\,\text{ch}\,\alpha x.$$

Après avoir ajouté à cette solution la solution particulière de l'équation (3) nous aurons

$$N_v=A\,\text{sh}\,\alpha x+B\,\text{ch}\,\alpha x+\frac{kP}{\alpha^2E_éF_é}. \tag{4}$$

Les constantes A et B, nous les trouverons des conditions aux limites:

$$\text{pour}\quad x=0\quad N_v=0,$$
$$\text{pour}\quad x=l\quad N_v=P.$$

Après résolution, nous aurons

$$A=-\frac{kP}{\alpha^2E_éF_é}\,\frac{1-\text{ch}\,\alpha l}{\text{sh}\,\alpha l}+\frac{P}{\text{sh}\,\alpha l},\quad B=-\frac{kP}{\alpha^2E_éF_é}.$$

La contrainte normale dans la vis est égale à

$$N_v=\frac{P}{\frac{1}{E_vF_v}+\frac{1}{E_éF_é}}\,\frac{1}{\text{sh}\,\alpha l}\left[\frac{\text{sh}\,\alpha l-\text{sh}\,\alpha(l-x)}{E_éF_é}+\frac{\text{sh}\,\alpha x}{E_vF_v}\right].$$

La contrainte normale dans l'écrou:

$$N_é=P-N_v.$$

L'effort exercé sur les spires du filetage est égal à

$$t=\frac{dN_v}{dx}=\frac{P}{\frac{1}{E_vF_v}+\frac{1}{E_éF_é}}\,\frac{\alpha}{\text{sh}\,\alpha l}\left[\frac{\text{ch}\,\alpha(l-x)}{E_éF_é}+\frac{\text{ch}\,\alpha x}{E_vF_v}\right].$$

Sir la fig. 199 est représenté le mode de variation de ces grandeurs sur l'axe de la vis et de l'écrou.

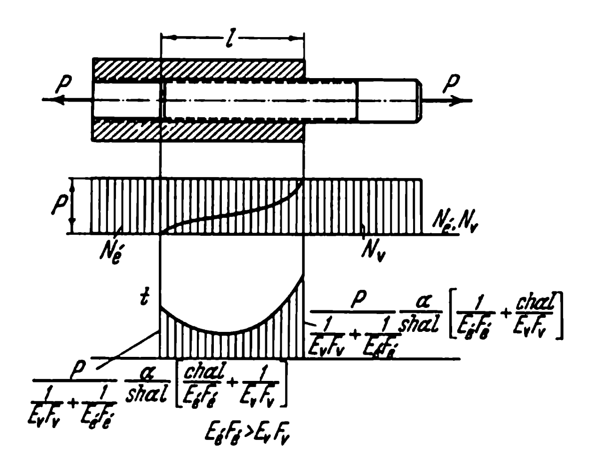


Fig. 199

17. Le problème se résout exactement de la même façon que le précédent. La seule différence sera due aux conditions aux limites qui, ici, seront:

$$\text{pour} \quad x = 0 \quad N_v = P,$$

$$\text{pour} \quad x = l \quad N_v = P.$$

Ces conditions sont remplies pour les valeurs suivantes des constantes A et B:

$$A = \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha l}{\operatorname{sh} \alpha l}\left(P - \frac{kP}{\alpha^2 E_{\acute{e}} F_{\acute{e}}}\right), \quad B = P - \frac{kP}{\alpha^2 E_{\acute{e}} F_{\acute{e}}}.$$

L'effort normal dans la vis sera

$$N_v = \frac{P}{\frac{1}{E_v F_v} + \frac{1}{E_{\acute{e}} F_{\acute{e}}}} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha l}\left[\frac{\operatorname{sh} \alpha x + \operatorname{sh} \alpha (l - x)}{E_v F_v} + \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{E_{\acute{e}} F_{\acute{e}}}\right].$$

L'effort normal dans l'écrou est égal à

$$N_{\acute{e}} = P - N_v.$$

L'effort exercé sur les spires du filetage sera

$$t = \frac{dN_v}{dx} = \frac{P\alpha}{\frac{1}{E_v F_v} + \frac{1}{E_{\acute{e}} F_{\acute{e}}}} \frac{\operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{ch} \alpha (l - x)}{E_v F_v \operatorname{sh} \alpha l}.$$

Sur la fig. 200 est représenté le mode de variation des grandeurs N_v, $N_{\acute{e}}$ et t le long de la vis.

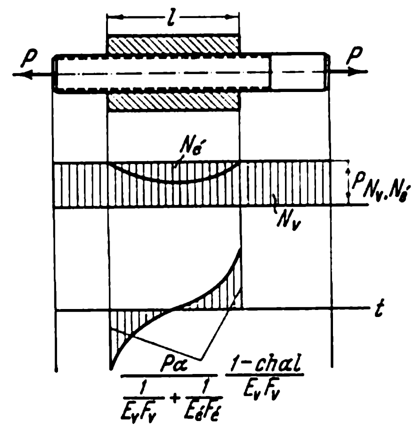


Fig. 200

18. Si l'on applique à la vis une force de compression P de telle façon que le pas de filetage diminue d'une valeur égale à Δ, et que l'on visse ensuite l'écrou, il n'y aura pas d'efforts dans le filetage. Si maintenant l'on décharge le boulon, on aura dans le système exactement les mêmes efforts que ceux du système étudié dans le problème précédent. C'est pourquoi, la solution obtenue plus haut reste valable aussi pour le cas présent si seulement la force P assure un allongement Δ par pas dans la vis librement tendue.

D'après la loi de Hooke

$$\Delta = \frac{Ps}{E_v F_v},$$

où s est le pas de filetage. Ainsi donc, pour obtenir la solution voulue, il suffit de remplacer P par $\frac{\Delta}{s} E_v F_v$ dans les expressions du problème précédent.

19. L'on doit considérer comme conditions les plus favorables celles qui assurent une répartition plus uniforme des efforts sur les spires. Dans le premier cas, la première spire se trouve fortement surchargée.

Dans le second cas, la force de serrage est appliquée sur l'écrou plus haut que la première spire. Le diamètre de l'écrou de la partie inférieure est réduit. C'est pourquoi, dans ce cas, les efforts agissant sur la première spire sont plus petits. Par là même (sous une force de serrage identique) les spires restantes se trouvent déchargées. Les conditions de travail dans ce second cas seront plus favorables.

Néanmoins, il ne faut pas en conclure que dans tous les cas il faut d'une manière générale employer les écrous de type *2* (fig. 18). Il est clair que la complication de toute structure, surtout d'une telle pièce standardisée d'usage courant qu'est un écrou, ne peut

être justifiée que dans le cas où cette complication assure des résultats tangibles. Comme la surcharge de quelques spires du filetage par rapport aux autres ne porte atteinte à la résistance d'un assemblage par filet que dans des cas exceptionnels, l'emploi des écrous du type décrit ne peut être recommandé, par conséquent, que sous forme d'exception.

20. Considérons un système de barres dans un état de déformation (fig. 201) et, s'étant fixé le déplacement du point A, trouvons

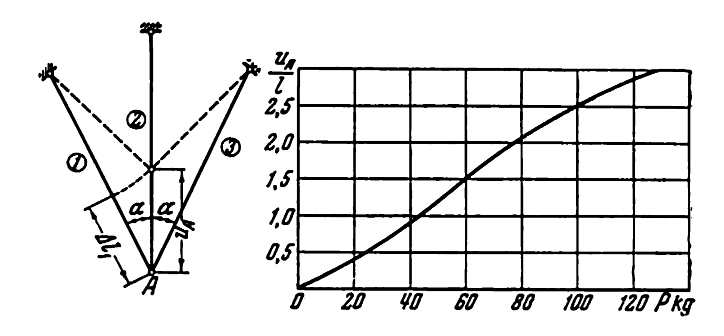


Fig. 201

la force P. Mesurons sur le dessin l'angle α, $\Delta l_1/l$ et u_A/l. D'après la courbe de la fig. 19, trouvons les efforts P_1 et P_2 correspondant aux allongements $\Delta l_1/l$ et u_A/l. La force P se détermine à partir de la condition d'équilibre

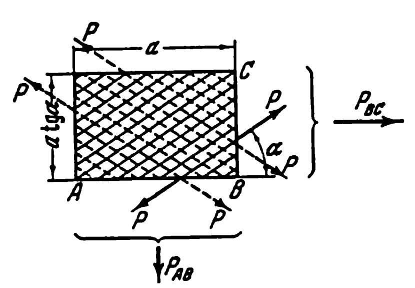


Fig. 202

$$P = 2P_1 \cos \alpha + P_2.$$

En se fixant quelques valeurs de u_A, on peut établir la courbe de dépendance de u_A par rapport à P. Sur la fig. 201 est représentée la courbe de dépendance $u_A = f(P)$ obtenue pour un diagramme donné de traction des tirants.

21. Le cas *1* a lieu sous de grands angles α tandis que le cas *2* a lieu sous de petits angles. Le cas *3* est un cas limite entre les deux premiers. La valeur de l'angle α correspondant peut être obtenue approximativement en supposant que la rigidité du fil dépasse sensiblement la rigidité du caoutchouc et que, par conséquent, toute la charge est entièrement supportée par les fils.

Prélevons du cylindre en caoutchouc câblé un élément de dimensions a et a tg α (fig. 202). Avec de telles dimensions, un nombre identique de fils reviendra à chacune des sections AB et BC de cet élément. Désignons par P l'effort agissant dans le fil, la résultante

des forces agissant dans la section AB sera alors égale à

$$P_{AB} = Pn \sin \alpha,$$

où n est le nombre de fils revenant à la section AB. Dans la section BC, la résultante correspondante sera

$$P_{BC} = Pn \cos \alpha.$$

Or, on sait que pour un cylindre sollicité par une pression interne, la contrainte tangentielle moyenne est deux fois plus grande que la contrainte axiale. Par conséquent,

$$\frac{P_{BC}}{a \operatorname{tg} \alpha} = 2 \frac{P_{AB}}{a}.$$

Après avoir substitué à P_{AB} et P_{BC} leurs valeurs, trouvons

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 35°16'.$$

Pour cette valeur de l'angle α l'enveloppe conserve sa forme cylindrique. Pour $\alpha > 35°16'$ le cylindre se déforme comme le montre la fig. 21, *1*, tandis que pour $\alpha < 35°16'$, suivant la fig. 21, *2*.

Remarquons, entre autres, que les problèmes concernant l'étude des structures analogues en caoutchouc câblé se rencontrent lors

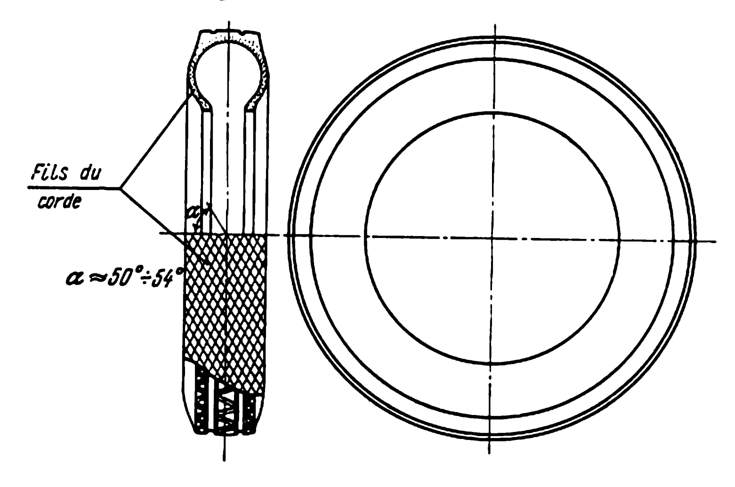


Fig. 203

du calcul des pneus pour automobiles. Le problème du choix de l'angle de disposition des fils est d'une importance particulière pour la durabilité des pneus (fig. 203). Une variation de l'angle dans l'un ou l'autre sens par rapport à l'angle optimal pour des pneus d'un type donné entraîne une diminution du délai de leur service. Il faut, cependant, dire que pour les pneus cet angle ne se

détermine pas par les conditions d'équilibre comme dans l'exemple étudié, mais bien par les conditions de résistance à la fatigue des fils sous des contraintes variables engendrées lors du roulement de la roue.

22. Prélevons du globe un fil et considérons son équilibre (fig. 204). Du côté de l'enveloppe en caoutchouc, sur ce fil agit une charge distribuée q kgf/cm. Cette sollicitation sera variable puisque la distance entre les fils est différente en différents points. Elle atteindra sa valeur maximale à l'équateur où

$$q_{éq} = p\frac{2\pi r_{éq}}{n},$$

p étant la pression et n, le nombre de fils.

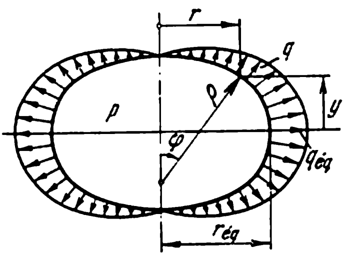


Fig. 204

Dans un point situé à une distance r de l'axe,

$$q = q_{éq}\frac{r}{r_{éq}}.$$

L'effort de traction T dans le fil ne change pas le long de l'arc du méridien. Il est égal à $T = q\rho$, ρ étant le rayon de courbure local du méridien. En excluant de là q et puis $q_{éq}$ trouvons

$$T = \frac{2\pi}{n} p\rho r.$$

D'autre part, de la condition d'équilibre de l'hémisphère,

$$T = \frac{p\pi r_{éq}^2}{n}.$$

En excluant T, trouvons

$$\rho = \frac{r_{éq}^2}{2r}.$$

Soit φ l'angle entre la normale à la surface déformée et l'axe de rotation. On aura alors $dr = \rho \cos \varphi d\varphi$ ou

$$dr = \frac{r_{éq}^2}{2r} \cos \varphi \, d\varphi.$$

En calculant l'intégrale, nous trouverons

$$r^2 = r_{éq}^2 \sin \varphi + C_1.$$

Comme φ s'annule pour $r = 0$, $C_1 = 0$ et

$$\sin \varphi = \frac{r^2}{r_{éq}^2}.$$

Désignons par y la distance d'un point quelconque à partir du plan de l'équateur. Il est évident que

$$\frac{dy}{dr} = -\operatorname{tg}\varphi,$$

ou

$$dy = -\frac{\frac{r^2}{r_{\text{éq}}^2}\,dr}{\sqrt{1-\frac{r^4}{r_{\text{éq}}^4}}}.$$

Pour calculer l'intégrale de cette expression, effectuons d'abord une substitution

$$r = r_{\text{éq}} \cos\psi.$$

Alors

$$dy = r_{\text{éq}} \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1+\cos^2\psi}},$$

ou

$$y = r_{\text{éq}} \frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\int_0^{\psi} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}\, d\psi - \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}}\right] + C_2.$$

La valeur de C_2 est nulle puisque, à l'équateur, $\psi = 0$ et y s'annule.

L'aplatissement relatif de la figure en état d'équilibre se détermine par la relation $y_0/r_{\text{éq}}$, y_0 étant le demi-axe vertical du corps de révolution:

$$\frac{y_0}{r_{\text{éq}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\psi - \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}(2E-F).$$

Ici F et E sont les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce ayant pour module $k = \sqrt{1/2}$. Les valeurs de ces intégrales étant données dans des tables, on trouve

$$F = 1{,}85407 \quad \text{et} \quad E = 1{,}35064.$$

En définitive,

$$\frac{y_0}{r_{\text{éq}}} = 0{,}599.$$

Détail curieux: cette forme trouvée pour l'enveloppe a le volume le plus grand parmi les autres corps de révolution ayant une même longueur donnée de l'arc du méridien. Cela découle, naturellement, du fait que les fils sont supposés inextensibles et l'énergie du système se traduit uniquement par le potentiel des forces de

pression. La pression effectue un travail égal à pV. Ce travail atteindra sa valeur la plus grande lorsque le volume V sera maximum tandis que le potentiel des forces externes ($-pV$) atteint, dans ces mêmes conditions, le minimum par comparaison à toutes les formes qui s'apparentent à celle trouvée.

23. Le phénomène indiqué peut avoir lieu dans le cas où des déformations plastiques suffisamment grandes sont engendrées dans un anneau en aluminium lors de l'échauffement. Désignons par Δ la différence entre le rayon externe de l'anneau intérieur et le rayon interne de l'anneau extérieur avant l'ajustage. Il est évident que

$$\varepsilon_A + \varepsilon_C = \frac{\Delta}{R}, \qquad (1)$$

où ε_A est le raccourcissement relatif de l'arc de l'anneau en aluminium, ε_C, l'allongement relatif de l'arc de l'anneau en acier.

Dans les limites des déformations élastiques, on aura, sous un échauffement supplémentaire,

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E_A} - \alpha_A t, \quad \varepsilon_C = \frac{\sigma_C}{E_C} + \alpha_C t,$$

où σ_A et σ_C sont les contraintes dans les anneaux en aluminium et en acier, α_A et α_C, les coefficients de dilatation linéaire correspondants.

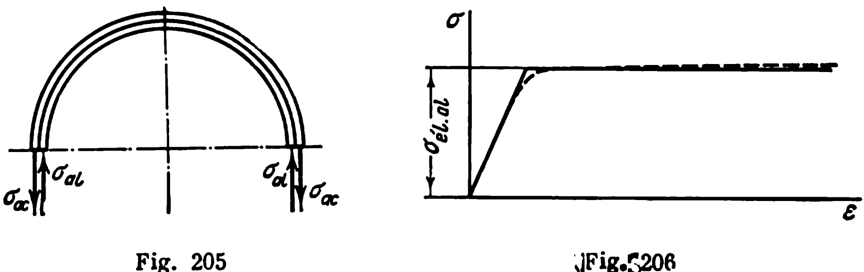


Fig. 205

Fig. 206

D autre part, pour une épaisseur identique des anneaux, on aura, comme cela découle des conditions d'équilibre (fig. 205), $\sigma_C = \sigma_A = \sigma$. L'équation (1) donne

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta}{R} + t(\alpha_A - \alpha_C)}{\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_C}}. \qquad (2)$$

Supposons que la courbe de traction ou de compression de l'aluminium peut être représentée schématiquement comme le montre la fig. 206. La limite d'élasticité de l'aluminium est inférieure à celle de l'acier. Comme dans les deux anneaux les contraintes sont égales, l'anneau en acier travaillera dans tous les cas dans la phase élastique.

La contrainte de serrage initial des anneaux que nous désignerons par σ_0 est égale à

$$\sigma_0 = \frac{\frac{\Delta}{R}}{\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_C}}.$$

L'expression (2) prendra alors la forme suivante:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{t(\alpha_A - \alpha_C)}{\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_C}}. \tag{3}$$

Remarquons que σ ne peut être plus grand que $\sigma_{\text{él. A}}$. Si la température d'échauffement

$$t > (\sigma_{\text{él. A}} - \sigma_0)\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_C}\right)\frac{1}{\alpha_A - \alpha_C},$$

dans l'anneau en aluminium apparaîtront des déformations plastiques et $\sigma = \sigma_{\text{él. A}}$.

Lors du refroidissement, les anneaux connaîtront des déformations élastiques. Les contraintes résiduelles peuvent alors être calculées comme la somme algébrique de $\sigma_{\text{él. A}}$ et de la « contrainte de refroidissement » obtenue à partir de l'expression (3) en remplaçant le signe précédant t par son contraire, c'est-à-dire

$$\sigma_{\text{rés}} = \sigma_{\text{él. A}} - \frac{t(\alpha_A - \alpha_C)}{\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_C}}. \tag{4}$$

Pour $\sigma_{\text{rés}} < 0$, l'anneau en aluminium se détache de celui en acier. Par conséquent, la condition pour que l'anneau se détache sera

$$t(\alpha_A - \alpha_C) > \sigma_{\text{él. A}}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_C}\right). \tag{5}$$

Un autre cas est possible lorsque les déformations plastiques apparaissent déjà dans l'anneau en aluminium lors du serrage avant l'échauffement. L'expression (4) et, par conséquent, l'expression (5) restent dans ce cas en vigueur et ce malgré les voies d'obtention de la limite d'élasticité $\sigma_{\text{él. A}}$.

24. Si les allongements thermiques de l'anneau et du cône sont identiques, la hauteur h ne changera évidemment pas. Supposons que l'allongement thermique de la barre conique est plus grand que celui de l'anneau:

$$\varepsilon_{tb} > \varepsilon_{ta}.$$

Dans ce cas, dans l'anneau apparaît, lors de l'échauffement, une contrainte de traction σ dont la valeur dépend de la différence entre les déformations thermiques $\varepsilon_{tb} - \varepsilon_{ta}$ (fig. 207). Si la contrainte σ reste inférieure à la limite d'élasticité, les dimensions de l'anneau se restituent lors du refroidissement et la hauteur h de fixation de

l'anneau ne change pas. Si la différence $\varepsilon_{tb} - \varepsilon_{ta}$ est suffisamment grande, l'anneau aura une déformation résiduelle et lors du refroidissement se déplacera vers le bas. Si on reprend l'échauffement, l'anneau sera à nouveau soumis à la traction et, dans la suite, se déplacera de nouveau en bas. Il continuera à descendre tant que la

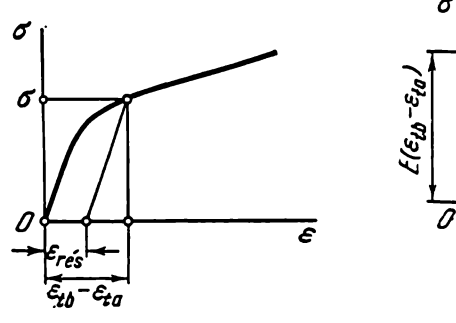


Fig. 207

Fig. 208

déformation élastique $\varepsilon_{él}$ n'aura pas atteint une valeur égale à $\varepsilon_{tb} - \varepsilon_{ta}$ (fig. 208). La nouvelle hauteur de fixation de l'anneau se détermine facilement à partir de la valeur de la déformation résiduelle totale $\Sigma\,\varepsilon_{rés}$.

Une situation analogue a lieu aussi pour $\varepsilon_{tb} < \varepsilon_{ta}$. Dans ce cas, l'anneau descend sous l'échauffement alors que la traction a lieu lors du refroidissement.

25. La déformation du tube dans la direction tangentielle est donnée par:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta}{R} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_x).$$

Désignons par p la pression de contact et par N la force axiale engendrée dans le tube. On aura alors

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}, \quad \sigma_x = \frac{N}{2\pi Rh},$$

h étant l'épaisseur du tube. Ainsi

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{1}{Eh}\left(pR - \mu\frac{N}{2\pi R}\right). \tag{1}$$

Par ailleurs, la force axiale dans la section x se détermine par l'intégrale des forces de frottement dans l'intervalle $(0 - x)$, c'est-à-dire

$$N = \int_0^x fp2\pi R\,dx, \tag{2}$$

f étant le coefficient de frottement. Maintenant l'expression (1) prend la forme suivante

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{1}{Eh}\left(pR - \mu f \int_0^x p\,dx\right).$$

Après avoir calculé la dérivée de cette expression par rapport à x, nous trouvons

$$\frac{dp}{dx} - \frac{\mu f}{R}\,p = 0,$$

d'où

$$p = p_0 e^{\frac{\mu f}{R}x}.$$

La constante p_0 n'est rien d'autre que la pression de contact à l'extrémité du tube. Trouvons-la de l'expression (1) dans laquelle nous poserons $N = 0$; cela donne

$$p_0 = \frac{Eh}{R^2}\,\Delta.$$

Par conséquent,

$$p = \frac{Eh\Delta}{R^2}\,e^{\frac{\mu f}{R}x}.$$

De l'expression (2), calculons la force axiale:

$$N = \frac{2\pi Eh\Delta}{\mu}\left(e^{\frac{\mu f}{R}x} - 1\right).$$

Ainsi, la pression de contact et la force axiale augmenteront au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité du tube. Cette augmentation cessera évidemment à partir de l'endroit où l'allongement axial dû aux forces N et p deviendra égal à l'allongement axial initial du tube. Or, pour un tube qui se dilate uniformément de tous les côtés sous effet thermique, l'allongement axial au moment de l'ajustage est égal à l'allongement tangentiel, c'est-à-dire Δ/R. Exprimons l'allongement axial par l'intermédiaire de p et N:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_t\right),$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{\mu R}\left[(1-\mu^2)\,e^{\frac{\mu f}{R}x} - 1\right].$$

Désignons par a la distance à partir de l'extrémité du tube sur laquelle a encore lieu le glissement et agissent les forces de frottement. De la dernière expression trouvons, en posant $\varepsilon_x = \Delta/R$ et $x = a$:

$$a = \frac{R}{\mu f}\ln\frac{1}{1-\mu}.$$

Pour $x > a$, $\varepsilon_x = \varepsilon_t = \frac{\Delta}{R} = \text{const}$, nous aurons

$$N = \frac{2\pi Eh\Delta}{1-\mu}, \quad p = \frac{Eh\Delta}{R^2}\frac{1}{1-\mu}.$$

A l'autre extrémité du tube, la répartition des forces sera identique.

Sur la fig. 209 on a montré les courbes de variation de l'effort normal N, des forces de frottement dN/dx, ainsi que de la pression

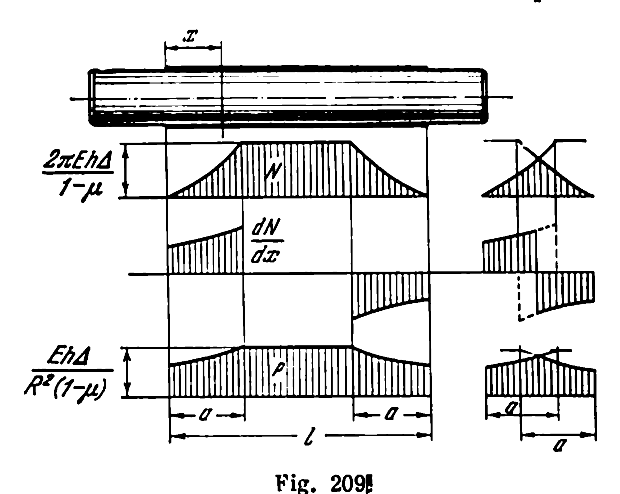


Fig. 209

de contact p le long de l'axe du tube. A côté, on a montré pour comparaison, les mêmes courbes pour le cas d'un tube plus court ($l < 2a$).

26. Etudions le cas a). La force normale dans la section du tube (fig. 210) sera

$$N = \int_0^x fp2\pi R\,dx - P \tag{1}$$

A la place de l'expression (1) obtenue lors de la solution du problè-

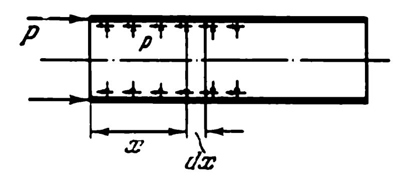


Fig. 210

me précédent, nous aurons

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{1}{Eh}\left[pR - \frac{\mu}{2\pi R}\left(-P + 2\pi Rf\int_0^x p\,dx\right)\right]. \tag{2}$$

Comme dans le cas précédent,

$$p = p_0 e^{\frac{\mu f}{R} x}.$$

La valeur p_0 s'obtiendra de l'équation (2) si l'on y pose $x = 0$:

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{1}{Eh}\left(p_0 R + \frac{\mu}{2\pi R} P\right),$$

d'où

$$p_0 = \frac{Eh}{R^2}\Delta - \frac{\mu P}{2\pi R^2}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$p = \left(\frac{Eh\Delta}{R^2} - \frac{\mu P}{2\pi R^2}\right) e^{\frac{\mu f}{R} x},$$

et de l'équation (1)

$$N = -\frac{2\pi Eh\Delta}{\mu} + \left(\frac{2\pi Eh\Delta}{\mu} - P\right) e^{\frac{\mu f}{R} x}.$$

Sur la fig. 211 sont représentées les courbes de variation de l'ef fort N, des forces de frottement dN/dx ainsi que de la pression de

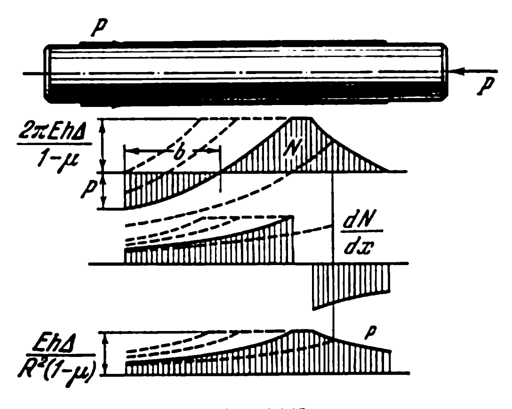


Fig. 211

contact le long du tube. En pointillé, on a montré l'allure de ces courbes pour $P = 0$, ainsi que pour quelques autres valeurs de P.

Le tube se détachera de la barre sous une force P', la même qu'il faut pour que le segment b (fig. 211) soit égal à la longueur du tube l.

Posant dans cette dernière expression $N = 0$ et $x = l$, trouvons

$$P' = \frac{2\pi Eh\Delta}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu f}{R} l}\right).$$

Etudions maintenant le cas b). Ici, la force P et les forces de frottement dans le voisinage de l'extrémité gauche du tube changent

de direction. C'est pourquoi

$$N = P - \int_0^x fp2\pi R\,dx,$$

et à la place de l'équation (2) nous aurons

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{1}{Eh}\left[pR - \frac{\mu}{2\pi R}\left(P - 2\pi Rf\int_0^x p\,dx\right)\right].$$

Alors,

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu f}{R}x},$$

avec

$$p_0 = \frac{Eh}{R^2}\Delta + \frac{\mu P}{2\pi R^2}.$$

En outre,

$$N = -\frac{2\pi Eh\Delta}{\mu} + \left(\frac{2\pi Eh\Delta}{\mu} + P\right)e^{-\frac{\mu f}{R}x}.$$

Les courbes correspondantes de variation de N, dN/dx et p sont représentées sur la fig. 212. Pour $x = b$, les forces de frottement changent subitement de direction.

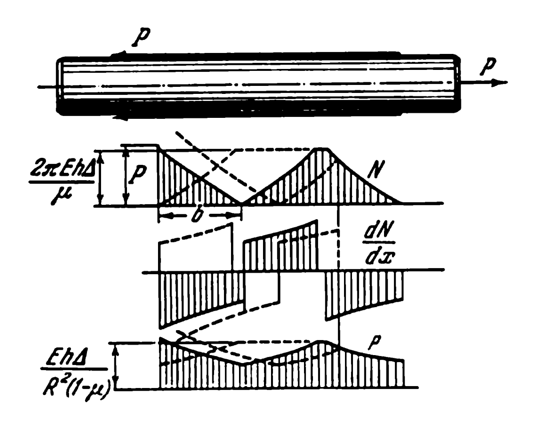


Fig. 212

En posant dans cette dernière expression $N = 0$ et $x = l$, nous trouverons la valeur cherchée de la force P' pour laquelle le tube se détache de la barre:

$$P' = \frac{2\pi Eh\Delta}{\mu}\left(e^{\frac{\mu f}{R}l} - 1\right).$$

La valeur de cette force se retrouve plus grande que celle obtenue dans le cas a), ce qui paraît assez évident puisque la force de traction

provoque un rétrécissement du tube et une augmentation des forces de frottement.

27. Supposons que dans un point anguleux de la section transversale de la poutre apparaît une certaine contrainte tangentielle τ (fig. 213).

Décomposons-la en deux composantes τ_1 et τ_2 perpendiculaires aux côtés du polygone. D'après le principe de parité des contraintes tangentielles, dans les faces latérales de la poutre doivent apparaître des contraintes tangentielles couplées τ_1 et τ_2. Or, sur la surface latérale il n'y a pas de contraintes. Par conséquent, $\tau_1 = \tau_2 = 0$. De là découle que $\tau = 0$.

Il est clair que la démonstration qui vient d'être faite reste valable pour toute valeur de l'angle plus petite que 180°.

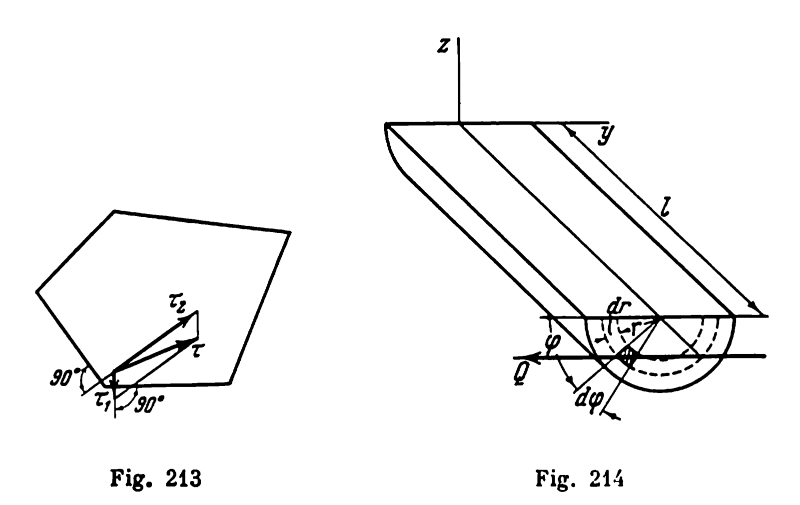


Fig. 213

Fig. 214

28. Le moment résultant de l'action des contraintes τ' est équilibré par le moment de la force résultante Q qui apparaît dans le plan de la section normale (fig. 214). Cette force aura, évidemment, la valeur suivante:

$$Q = \int_0^R \int_0^\pi \tau r \sin \varphi \, dr \, d\varphi.$$

Or, on a

$$\tau = \tau_{\max} \frac{r}{R},$$

aussi

$$Q = \int_0^R \int_0^\pi \tau_{\max} \frac{r^2}{R} \sin \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{2}{3} \tau_{\max} R^2.$$

Le moment de la force Q par rapport à l'axe z est égal à

$$M = \frac{2}{3} \tau_{max} R^2 l$$

Les contraintes τ' donnent un moment absolument identique:

$$M = 2l \int_0^R \tau' r\, dr = \frac{2\tau_{max} l}{R} \int_0^R r^2\, dr = \frac{2}{3} \tau_{max} R^2 l.$$

29. Si la poutre subissait une torsion sans traction, alors, dans les limites des petits déplacements, il y aurait entre l'angle spécifique de torsion θ et le moment M la relation suivante

$$\theta = \frac{3M}{Gbh^3},$$

en d'autres mots, la rigidité en torsion serait égale à

$$C_0 = \frac{1}{3} Gbh^3.$$

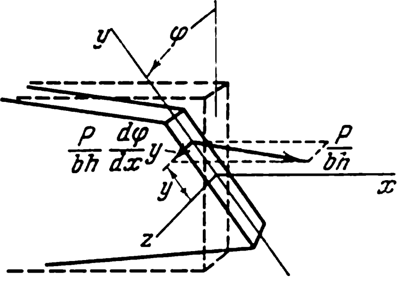


Fig. 215

Etudions maintenant le cas de la torsion de la poutre, cette dernière étant simultanément soumise à la traction par une force P. Lorsque la section frontale se retourne d'un certain angle, les contraintes normales P/bh gardent la direction des fibres longitudinales de la bandelette tordue (fig. 215). Les projections de ces contraintes sur un plan perpendiculaire à l'axe de la bande sont égales à

$$\frac{P}{bh} \frac{d\varphi}{dx} y = \frac{P}{bh} \theta y.$$

Ces contraintes sont à l'origine d'un couple de torsion supplémentaire

$$M_P = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{P}{bh} \theta y^2 h\, dy = P\theta \frac{b^2}{12}$$

Additionnant ce moment à celui créé par les contraintes tangentielles, trouvons

$$M = C_0\theta + P\theta \frac{b^2}{12} = \theta \left(C_0 + \frac{Pb^2}{12} \right).$$

Ainsi, la rigidité en torsion de la bande en traction est égale à la rigidité de cette même bande, travaillant sans traction, plus une grandeur égale à

$$\frac{Pb^2}{12}.$$

30. Puisque le tube et le rouleau ne sont pas rigides, le glissement local sur la surface de contact commence avant que la valeur du moment n'atteigne M_0. Au début, le glissement a lieu dans les zones limitant l'aire de contact. Pour $M = M_0$ le glissement gagne toute la surface de contact. Le moment des forces de frottement atteint alors sa valeur limite M_0 et dans le tube, tout au long du contact, le rouleau commence à se retourner.

Divisons l'aire de contact l en trois zones a, b et c (fig. 216). Sur la tranche a, le moment de torsion dans le tube est plus grand que celui agissant dans le rouleau et, respectivement, l'angle de torsion l'est aussi. Au fur et à mesure que l'on passe de la section A

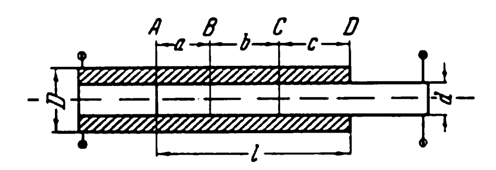


Fig. 216

à la section B, le moment de torsion se transmet du tube au rouleau et, dans la section B, les angles de torsion du tube et du rouleau deviennent identiques.

Sur la tranche b il n'y a pas de glissement. Sur la tranche c, le glissement aura de nouveau lieu. Ici, le moment de torsion dans le rouleau est plus grand que dans le tube et l'angle de torsion le sera aussi. Au fur et à mesure que l'on passe de la section C à la section D, le moment dans le tube tombe jusqu'à zéro alors que dans le rouleau, il croît jusqu'à M.

L'intensité des moments créés par les forces de frottement est égale à

$$m = \frac{M_0}{l}. \tag{1}$$

La valeur de m ne dépend pas du moment M et n'est déterminée que par le coefficient de frottement et l'intensité du serrage.

Déterminons maintenant la longueur des tranches a, b, c. Considérons à cet effet séparément le tube et le rouleau (fig. 217). De la condition d'équilibre nous aurons, évidemment

$$m(a + c) = M, \tag{2}$$

tandis que de la condition d'égalité des angles de torsion sur la tranche b, nous tirons

$$\frac{mc}{(GJ_p)_t} = \frac{ma}{(GJ_p)_r}. \tag{3}$$

Des équations (2) et (3), trouvons

$$a = \frac{\frac{Ml}{M_0}}{1 + \frac{(GJ_p)_t}{(GJ_p)_r}}, \quad c = \frac{\frac{Ml}{M_0}}{1 + \frac{(GJ_p)_r}{(GJ_p)_t}}. \tag{4}$$

Si les rigidités du tube et du rouleau sont égales, de (4) nous tirons

$$a = c = \frac{Ml}{2M_0}.$$

Connaissant a et c, traçons les diagrammes des moments (fig. 217).

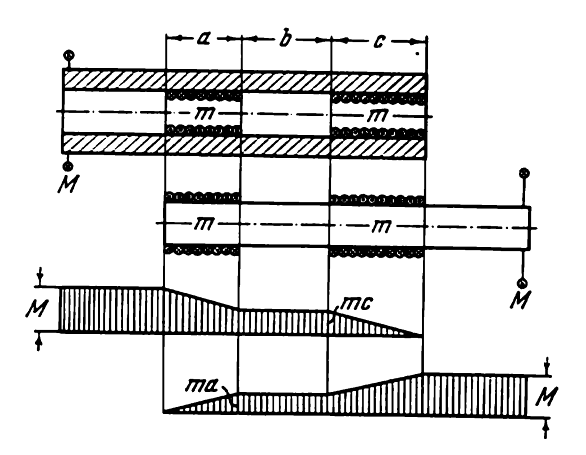


Fig. 217

Avec l'augmentation du moment M, les tranches a et c deviennent plus longues tandis que la tranche b rétrécit. Pour $M = M_0$, la somme $a + c$ est égale à l et $b = 0$. Après cela, le moment des forces de frottement qui croissait grâce à l'augmentation des tranches a et c ne pourra plus le faire et commencera un glissement général sur la surface de contact.

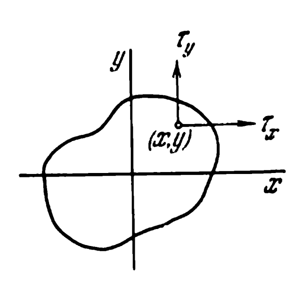


Fig. 218

31. Plaçons au centre de gravité de la tache d'encollage l'origine d'un système des coordonnées x, y (fig. 218). Supposons que lors de l'application d'une charge, le gousset collé se déplace à gauche d'une valeur Δ_x et en bas d'une valeur Δ_y et que, en outre, il s'est retourné d'un petit angle φ dans le sens des aiguilles d'une montre.

Déterminons les contraintes τ_x et τ_y agissant sur le gousset. Elles sont proportionnelles au déplacement local, c'est-à-dire au

déplacement du point ayant pour coordonnées x, y:

$$\tau_x = k(\Delta_x - \varphi y), \quad \tau_y = k(\Delta_y + \varphi x),$$

k étant un certain coefficient de proportionnalité entre la contrainte et le déplacement.

Donnons les équations d'équilibre

$$\int_F \tau_x \, dF = 0, \quad \int_F \tau_y \, dF = P, \quad \int_F (\tau_y x - \tau_x y) \, dF = M,$$

où M est le moment de la force P par rapport à l'origine des coordonnées. L'intégration s'étend sur la surface de toute la tache ou sur la surface totale des taches s'il y en a plusieurs.

Tenant compte du fait que les axes x et y sont centraux, nous obtenons

$$\Delta_x = 0, \quad k\Delta_y F = P, \quad k\varphi J_p = M,$$

J_p étant le moment d'inertie polaire de la tache d'encollage par rapport au centre de gravité. En remplaçant Δ_x, Δ_y et φ dans les expressions des contraintes τ_x et τ_y par leurs valeurs, nous aurons:

$$\tau_x = -\frac{M}{J_p} y, \quad \tau_y = \frac{P}{F} + \frac{M}{J_p} x.$$

La contrainte totale est

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

En mettant dans cette expression les valeurs de τ_x et τ_y, déterminons l'emplacement des points où la contrainte totale atteint sa valeur limite τ_1:

$$\left(x + \frac{P}{M} \frac{J_p}{F}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{J_p \tau_1}{M}\right)^2.$$

Comme on voit, il s'agit d'un cercle de rayon $\frac{J_p \tau_1}{M}$. Le centre de ce cercle se trouve sur l'axe x et est décalé à gauche d'une valeur égale à (fig. 219)

$$\frac{P}{M} \frac{J_p}{F}.$$

Si le cercle croise le contour de la tache d'encollage, dans la région extérieure de la tache la contrainte dépasse la limite de résistance. Si, par contre, la tache d'encollage s'inscrit entièrement dans le cercle, la condition de résistance sera observée.

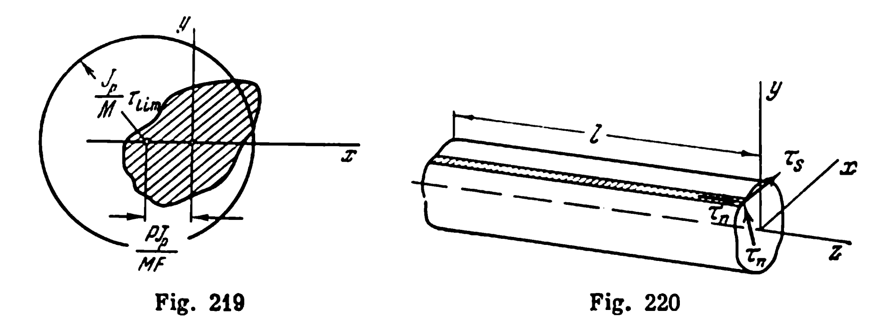


Fig. 219 Fig. 220

32. 1) Au moyen d'une surface cylindrique passant par le contour donné, dégageons la partie intérieure de la poutre (fig. 220). Sur la surface cylindrique qu'on vient de tracer, apparaissent des contraintes tangentielles τ_n agissant par couples. Projetant sur l'axe z toutes les forces agissant sur la partie dégagée de la poutre, nous aurons

$$\int_z \tau_n l\, ds = 0$$

ou, autrement,

$$\int_z \tau_n\, ds = 0.$$

2) Etudions un élément $ds\, dz$ d'une surface cylindrique passant par le contour en question (fig. 221). Après l'application de la charge sur la poutre, cet élément se déformera et prendra la forme d'un parallélogramme représenté sur la fig. 221. L'angle de cisaillement γ sera déterminé par la somme des angles α et β, c'est-à-dire

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Trouvons maintenant l'expression de chacun de ces termes. L'angle α est donné par l'angle de torsion θ et par la distance mesurée à par-

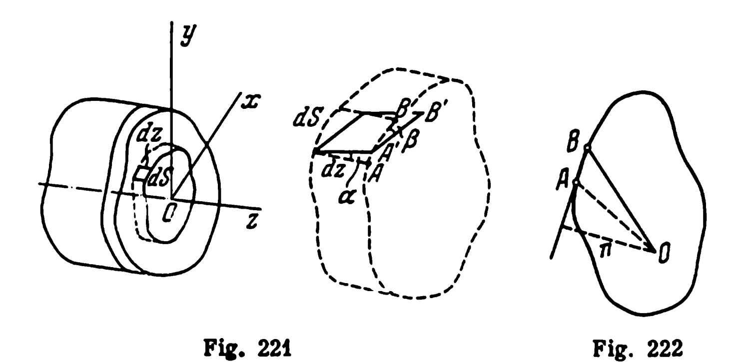


Fig. 221 Fig. 222

tir du centre de torsion; de fait, de la fig. 221, nous aurons

$$\alpha = \frac{AA'}{dz}:$$

or, $AA' = nd\varphi$, $d\varphi$ étant l'angle de rotation relatif des sections se trouvant à une distance égale à dz l'une par rapport à l'autre, n, la distance du centre de torsion O (fig. 222) à la tangente au contour au point A. Puisque $d\varphi/dz = 0$, $\alpha = \theta n$.

Lors de la torsion, la section de la poutre ne reste pas plane et subit un certain déplacement $w(x, y)$ dans la direction de l'axe z. Il est évident que (fig. 221)

$$\beta = \frac{dw}{ds}$$

Comme $\gamma = \tau_s/G$, on aura

$$\frac{\tau_s}{G} = \theta n + \frac{dw}{ds}.$$

d'où nous tirons

$$dw = \left(\frac{\tau_s}{G} - \theta n\right) ds.$$

L'intégrale de dw sur un contour fermé est égale à zéro. C'est pourquoi

$$\frac{1}{G}\int_s \tau_s\, ds - \theta \int_s n\, ds = 0.$$

Or nds est le double de l'aire du triangle OAB (fig. 222); par conséquent,

$$\int_s n\, ds = 2F_s, \quad \int_s \tau_s\, ds = 2GF_s\theta.$$

33. Sur la fig. 223 on a montré un corps à parois minces dont les axes principaux centraux sont x, y. Supposons que, en torsion, la

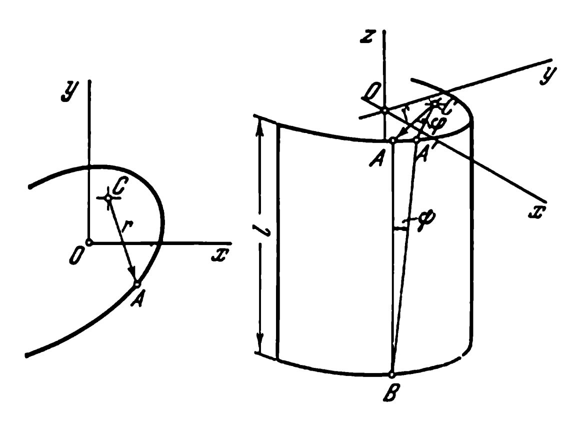


Fig. 223

section se retourne d'un angle φ par rapport à un certain point C ayant pour coordonnées x_C, y_C. Dans ce cas, la génératrice AB (fig. 223) se retournera d'un angle $\psi = r\varphi/l = r\theta$. Cela provoquera un allongement longitudinal égal à

$$\varepsilon = \frac{A'B - AB}{AB} = \frac{1}{\cos\psi} - 1, \quad \varepsilon \approx \frac{1}{2}\psi^2$$

ou

$$\varepsilon = \frac{1}{2} r^2\theta^2.$$

Simultanément avec la rotation par rapport à l'axe longitudinal, il peut y avoir un mouvement de rotation réciproque des sections par rapport aux axes x et y, ainsi que leur déplacement axial réciproque. Cela conduira à l'apparition dans l'expression pour ε d'une composante supplémentaire dépendant linéairement de x et de y, c'est-à-dire que nous aurons

$$\varepsilon = \frac{1}{2} r^2\theta^2 + a + bx + cy$$

et, par suite, la contrainte sera de

$$\sigma = E\left(\frac{1}{2} r^2\theta^2 + a + bx + cy\right). \tag{1}$$

La déplanation de la section n'influe pas sur l'allongement ε puisque on étudie la torsion non gênée (sur la longueur de la barre, θ ne change pas).

Les constantes a, b et c doivent être choisies de telle façon que la force normale dans la section ainsi que les moments fléchissants par rapport aux axes x et y soient nuls:

$$N = \int\limits_F \sigma\, dF = 0, \quad M_x = \int\limits_F \sigma y\, dF = 0, \quad M_y = \int\limits_F \sigma x\, dF = 0,$$

de là, nous obtenons

$$a = -\frac{\theta^2 J_p}{2F}, \qquad b = -\frac{\theta^2 H_y}{2J_y}, \qquad c = -\frac{\theta^2 H_x}{2J_x},$$

où J_x, J_y et J_p sont les moments d'inertie axiaux et polaire de la section; H_x et H_y, nouvelles caractéristiques géométriques

$$H_x = \int\limits_F r^2 y\, dF, \quad H_y = \int\limits_F r^2 x\, dF.$$

L'expression (1) prend la forme suivante

$$\sigma = \frac{E\theta^2}{2}\left(r^2 - \frac{J_p}{F} - \frac{H_y}{J_y} x - \frac{H_x}{J_x} y\right). \tag{2}$$

Les contraintes σ assurent dans la section un moment de torsion supplémentaire

$$M_z = \int\limits_F \sigma\psi r\, dF$$

ou

$$M_z = \frac{E\theta^3}{2} \int_F \left(r^2 - \frac{J_p}{F} - \frac{H_y}{J_y} x - \frac{H_x}{J_x} y\right) r^2 dF,$$

$$M_z = \frac{E\theta^3}{2} K,$$

ici, par K on entend une nouvelle caractéristique géométrique

$$K = \int_F r^4 dF - \frac{J_p^2}{F} - \frac{H_y^2}{J_y} - \frac{H_x^2}{J_x}. \tag{3}$$

Le moment de torsion dans la section est composé du moment « ordinaire », créé par les contraintes tangentielles, et du moment supplémentaire

$$M_t = \frac{1}{3} s\delta^2 G\theta + \frac{E\theta^3}{2} K = \frac{1}{3} s\delta^3 G\theta \left(1 + \frac{E}{G} \frac{3}{2\delta^3 s} \theta^2 K\right), \tag{4}$$

s étant la longueur de l'arc du contour de la section.

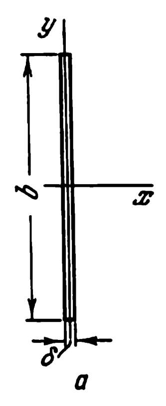
En remplaçant dans les expressions (2) et (3) r^2 par $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$, constatons que les coordonnées x_c et y_c ne figurent pas dans les expressions donnant σ et K. Cela signifie que le pôle C peut être choisi arbitrairement et que ce choix ne se fait qu'à partir des considérations de commodité.

Etudions les cas particuliers:

a) Une bande de section rectangulaire avec pour côtés b et δ (fig. 224, *a*). Dans ce cas, nous aurons

$$F = b\delta, \quad J_p = \frac{b^3\delta}{12}, \quad H_x = H_y = 0,$$

$$K = \delta \int_{-b/2}^{+b/2} y^4 dy - \frac{b^5\delta}{144} = \frac{b^5\delta}{180}.$$



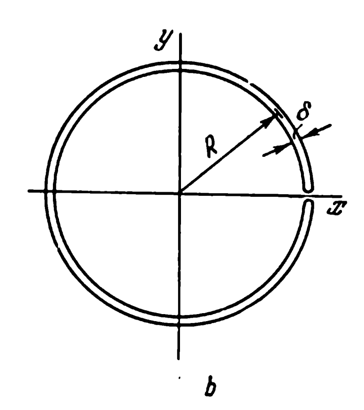


Fig. 224

Alors

$$\sigma=\frac{E\theta^2}{2}\left(y^2-\frac{b^2}{12}\right),\quad M_t=\frac{1}{3}b\delta^3G\theta\left(1+\frac{E}{G}\frac{b^4}{120\delta^2}\theta^2\right).$$

Le dernier terme dans l'équation pour M_t permet de faire une appréciation quantitative de l'effet non linéaire.

b) Un profilé circulaire non fermé (fig. 224, *b*).

$$F=2\pi R\delta,\quad J_p=2\pi R^3\delta,\quad H_x=H_y=0,\quad K=0,$$

par conséquent, $\sigma=0$,

$$M_t=\frac{1}{3}2\pi R\delta^3G\theta.$$

Il n'y aura pas dans ce cas d'effet non linéaire.

34. Au moyen de deux surfaces cylindriques de rayons r et $r+dr$ ainsi que de deux sections transversales, prélevons de la barre un anneau élémentaire d'épaisseur dz (fig. 225).

En faisant s'annuler la somme des moments par rapport à l'axe z, nous aurons

$$\left(\tau+\frac{\partial\tau}{\partial z}dz\right)2\pi r^2\,dr-\tau 2\pi r^2\,dr=\left(t+\frac{\partial t}{\partial r}dr\right)2\pi(r+dr)^2dz-t2\pi r^2\,dz,$$

d'où

$$r^2\frac{\partial\tau}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}(tr^2). \tag{1}$$

Désignons par v le déplacement d'après la direction de la tangente à l'arc de cercle (fig. 226). L'angle de cisaillement sur la sur-

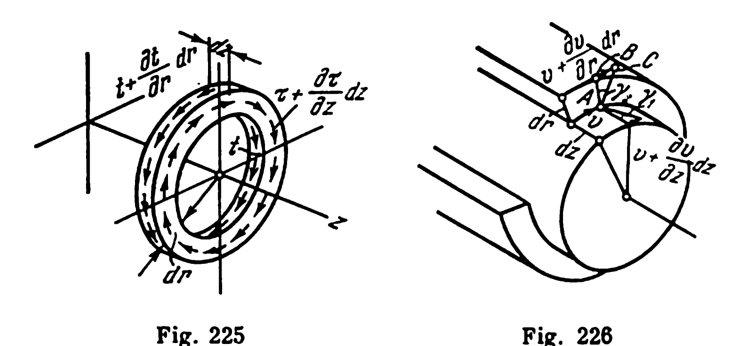


Fig. 225 Fig. 226

ace cylindrique est, comme d'ordinaire, égal à

$$\gamma_1=\frac{\partial v}{\partial z}$$

tandis que la contrainte

$$\tau=G\frac{\partial v}{\partial z}. \tag{2}$$

L'angle de cisaillement γ_2 dans le plan de la section transversale est égal au rapport des segments BC/AB (fig. 226). Or,

$$BC = v + \frac{\partial v}{\partial r} dr - v \frac{r+dr}{r}, \quad AB = dr,$$

par conséquent,

$$\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r},$$

et la contrainte correspondante

$$t = -G\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right). \tag{3}$$

En mettant dans l'équation d'équilibre (1) τ et t, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(vr)\right] = 0. \tag{4}$$

L'on peut, naturellement, supposer que le déplacement v varie en fonction de z d'après une courbe du second degré comme dans le cas d'une torsion ordinaire, c'est-à-dire

$$v = v_0 + v_1 z + v_2 z^2,$$

ici v_0, v_1, v_2 dépendent uniquement de r. L'équation (4), après substitution de v, se décompose en trois équations suivantes:

$$\left[\frac{1}{r}(v_0 r)'\right]' = -2v_2, \quad \left[\frac{1}{r}(v_1 r)'\right]' = 0, \quad \left[\frac{1}{r}(v_2 r)'\right]' = 0, \tag{5}$$

d'où

$$v_1 = A_1 r + \frac{B_1}{r}, \quad v_2 = A_2 r + \frac{B_2}{r}.$$

Enfin, en mettant v_2 dans le deuxième membre de la première des équations (5), nous aurons

$$v_0 = A_0 r + \frac{B_0}{r} - \frac{A_2}{4} r^3 - B_2 r \ln r.$$

Comme sur l'axe de la barre les déplacements sont nuls, il faut poser $B_0 = B_1 = B_2 = 0$. Alors

$$v = A_0 r - \frac{A_2}{4} r^3 + A_1 rz + A_2 rz^2,$$

et d'après les expressions (2) et (3)

$$\tau = G(A_1 + 2A_2 z) r, \quad t = G\frac{1}{2} A_2 r^2.$$

Sur l'extrémité frontale de gauche, c'est-à-dire pour $z = 0$, les contraintes tangentielles sont nulles. Par conséquent, $A_1 = 0$. Sur la surface du cylindre ($r = d/2$), on a $t = m/\pi d$, aussi $A_2 = 8m/\pi d^3 G$ et, en définitive, nous obtenons

$$\tau = \frac{16m}{\pi d^3} rz, \quad t = \frac{4m}{\pi d^3} r^2.$$

Ainsi, les contraintes τ se répartissent selon r et z de façon linéaire, ce qui découle aussi de la théorie habituelle de la torsion. Les contraintes t se répartissent le long du rayon d'après une courbe de second degré. Le rapport entre les valeurs maximales de τ et t sera

$$\frac{\tau_{max}}{t_{max}}=\frac{16m}{\pi d^3}\frac{d}{2}l:\frac{4m}{\pi d^3}\frac{d^2}{4}=8\frac{l}{d}.$$

Par conséquent, pour un cylindre long, la contrainte t_{max} est beaucoup plus petite que τ_{max}.

35. Etudions les conditions d'équilibre d'un élément $dx\,dy\,dz$ (fig. 227, *a*).

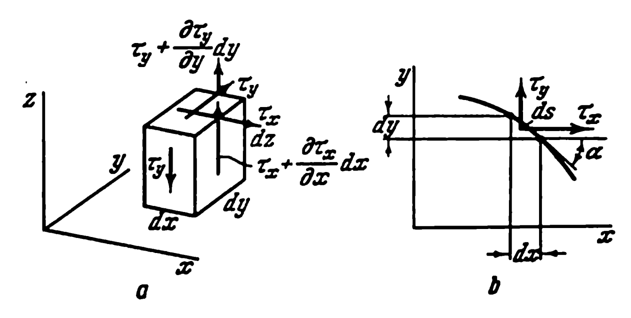


Fig. 227

Vu que la somme des projections de toutes les forces sur l'axe z est nulle, on a

$$\frac{\partial\tau_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Sur le contour (fig. 227, *b*) nous aurons la condition à la limite suivante:

$$\tau_y\cos\alpha+\tau_x\sin\alpha=0$$

ou

$$\tau_y\frac{dx}{ds}+\tau_x\frac{dy}{ds}=0,\quad \tau_y\,dx=-\tau_x\,dy. \tag{2}$$

Etudions maintenant les intégrales indiquées dans les données du problème:

$$\int\limits_x\int\limits_y\tau_x y\,dx\,dy,\quad \int\limits_x\int\limits_y\tau_y x\,dx\,dy.$$

L'intégration par parties de la première expression par rapport à dx et de la seconde par rapport à dy donne

$$\int\limits_x\int\limits_y\tau_x y\,dx\,dy=\int\limits_y\left[|\tau_x x|_{x_1}^{x_2}-\int\limits_x\frac{\partial\tau_x}{\partial x}x\,dx\right]y\,dy,$$

$$\int\limits_x\int\limits_y\tau_y x\,dy\,dx=\int\limits_x\left[|\tau_y y|_{y_1}^{y_2}-\int\limits_y\frac{\partial\tau_y}{\partial y}y\,dy\right]x\,dx,$$

ce qui conduit aux expressions suivantes

$$\int\limits_x \int\limits_y \tau_x y\,dx\,dy = \int\limits_y |\tau_x x|_{x_1}^{x_2} y\,dy - \int\limits_y \int\limits_x \frac{\partial \tau_x}{\partial x} xy\,dx\,dy,$$

$$\int\limits_x \int\limits_y \tau_y x\,dx\,dy = \int\limits_x |\tau_y y|_{y_1}^{y_2} x\,dx - \int\limits_x \int\limits_y \frac{\partial \tau_y}{\partial y} xy\,dx\,dy.$$

D'après la condition à la limite (2), nous aurons

$$\int\limits_y |\tau_x x|_{x_1}^{x_2} y\,dy = - \int\limits_x |\tau_y y|_{y_1}^{y_2} x\,dx,$$

tandis que la condition d'équilibre (1) donne

$$\int\limits_y \int\limits_x \frac{\partial \tau_x}{\partial x} xy\,dx\,dy = - \int\limits_x \int\limits_y \frac{\partial \tau_y}{\partial y} xy\,dx\,dy.$$

Par conséquent, nous en arrivons à l'égalité suivante

$$\int\limits_x \int\limits_y \tau_x y\,dx\,dy = - \int\limits_x \int\limits_y \tau_y x\,dx\,dy.$$

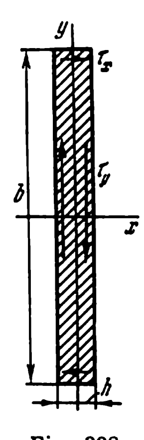


Fig. 228

Mais comme

$$\int\limits_x \int\limits_y \tau_x y\,dx\,dy - \int\limits_x \int\limits_y \tau_y x\,dx\,dy = M_t,$$

nous aurons en définitive

$$\int\limits_x \int\limits_y \tau_x y\,dx\,dy = \frac{M_t}{2},$$

$$- \int\limits_x \int\limits_y \tau_y x\,dx\,dy = \frac{M_t}{2}.$$

Les relations obtenues comportent un certain élément instructif. Par exemple, lorsque dans une bande rectangulaire étroite en torsion (fig. 228) nous négligeons toujours les contraintes τ_x par rapport aux contraintes τ_y, c'est tout à fait raisonnable. Mais si lors de la détermination du moment de torsion nous avions négligé le moment créé par les petites contraintes τ_x, nous nous serions trompés exactement de 100 %. En effet, les petites contraintes τ_x agissant avec un grand bras de levier y provoquent un moment tout à fait analogue à celui créé par les grandes contraintes τ_y agissant avec un petit bras de levier x.

II. PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS. FLEXION

36. Le moment d'inertie centrifuge d'un triangle rectangle par rapport aux axes parallèles aux côtés formant l'angle droit et passant par leur milieu est égal à zéro (fig. 229).

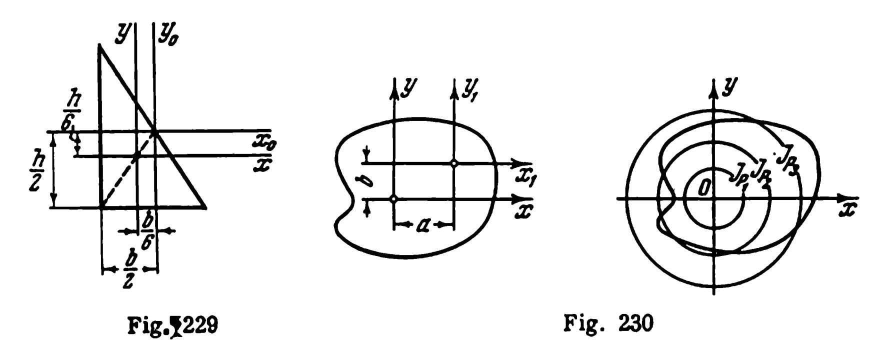


Fig. 229

Fig. 230

D'après la formule de transformation, trouvons

$$J_{xy} = J_{x_0y_0} - \frac{b}{6}\frac{h}{6}\frac{bh}{6},$$

où

$$J_{x_0y_0} = 0,$$

par conséquent,

$$J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}.$$

37. Désignons par J_{p_0} le moment d'inertie polaire de la figure par rapport au centre de gravité de cette dernière et par J_p, le même moment par rapport à un certain point arbitraire ayant pour coordonnées a, b (fig. 230).

Il est évident que

$$J_p = J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y + (a^2 + b^2) F,$$

d'où

$$a^2+b^2=\frac{J_p-J_{p_0}}{F}.$$

Par conséquent, le lieu géométrique des points où les moments d'inertie polaires d'une figure plane restent constants, est constitué par un ensemble de cercles concentriques dont le centre se situe dans le point O (cf. fig. 230). Le rayon de chacun de ces cercles s'obtient au moyen de la valeur J_p:

$$R=\sqrt{\frac{J_p-J_{p_0}}{F}}.$$

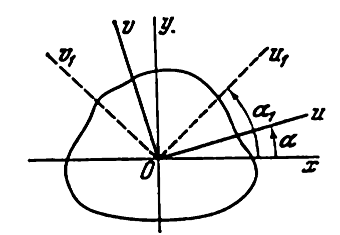


Fig. 231

38. Considérons une certaine section plane (fig. 231). Soit x et y les axes principaux. Supposons qu'il existe encore une paire d'axes principaux u, v ne coïncidant pas avec x, y (l'angle α n'est pas un multiple de $\pi/2$). Si les axes u, v sont principaux, $J_{uv}=0$. Or, l'on sait que

$$J_{uv}=J_{xy}\cos 2\alpha+\frac{J_x-J_y}{2}\sin 2\alpha$$

mais puisque les axes x, y sont aussi principaux, $J_{xy}=0$. Par conséquent,

$$\frac{J_x-J_y}{2}\sin 2\alpha=0,$$

or, $\sin 2\alpha\neq 0$, c'est pourquoi

$$J_x=J_y. \tag{1}$$

Considérons maintenant une paire arbitrairement choisie d'axes u_1, v_1 pour lesquels

$$J_{u_1v_1}=J_{xy}\cos 2\alpha_1+\frac{J_x-J_y}{2}\sin 2\alpha_1.$$

Il est évident qu'indépendamment de l'angle α_1 nous aurons $J_{u_1v_1}=$ $=0$, c'est-à-dire que toute paire d'axes u_1, v_1 est principale.

De cette démonstration découle que pour toute section ayant trois axes de symétrie ou plus, tous les axes centraux seront principaux et le moment d'inertie axial par rapport à tout axe central sera toujours le même [cela découle de l'expression (1)].

Pareille propriété caractérise, par exemple, les sections représentées sur la fig. 232 (carré, triangle équilatéral, hexagone curviligne, etc.).

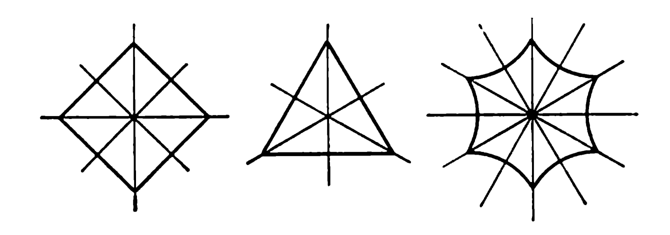


Fig. 232

39. Considérons une section plane ayant pour axes principaux x, y (fig. 233). Supposons que le point cherché A a pour coordonnées a, b. Choisissons maintenant a et b de telle façon que J_{uv} soit nul pour tout α. Etablissons d'abord, d'après la formule de transfert

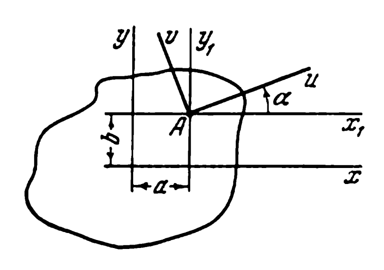


Fig. 233

$$J_{x_1} = J_x + b^2F,$$

$$J_{y_1} = J_y + a^2F, \quad J_{x_1y_1} = abF.$$

Ensuite, d'après la formule pour les axes renversés, on aura

$$J_{uv} = J_{x_1y_1} \cos 2\alpha + \frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha.$$

Pour que J_{uv} soit nul pour n'importe quel angle α, il faut évidemment que

$$J_{x_1y_1} = 0, \quad J_{x_1} - J_{y_1} = 0,$$

ou bien que

$$abF = 0, \quad J_x - J_y = (a^2 - b^2)\,F.$$

De la première équation découle que soit a, soit b, soit les deux ensemble sont nuls, c'est-à-dire que le point cherché se trouve dans tous les cas sur l'un des axes centraux principaux.

Posons $J_y \geqslant J_x$ et supposons pour commencer que $b = 0$. Alors,

$$a = \pm \sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}}.$$

Pour le cas $J_y > J_x$, a est une grandeur imaginaire. Pour

$$J_y = J_x, \; a = 0.$$

Supposons maintenant que $a = 0$. Alors

$$b = \pm \sqrt{\frac{J_y - J_x}{F}}.$$

Pour $J_y > J_x$, b est réel. Pour $J_y = J_x$, $b = 0$.

Ainsi, nous aurons quatre points cherchés avec les coordonnées:

1) $a = +\sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}}$, $b = 0$;

2) $a = -\sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}}$, $b = 0$;

3) $a = 0$, $b = +\sqrt{\frac{J_y - J_x}{F}}$;

4) $a = 0$, $b = -\sqrt{\frac{J_y - J_x}{F}}$.

Les points situés sur l'axe de moment d'inertie minimal sont imaginaires. Les points situés sur l'axe de moment d'inertie maximal sont réels. Dans le cas où les moments d'inertie principaux sont égaux ($J_x = J_y$), tous les quatre points sont réels et sont situés au centre de gravité. Tous les axes passant par le centre de gravité seront alors principaux (cercle, carré, triangle équilatéral, etc.).

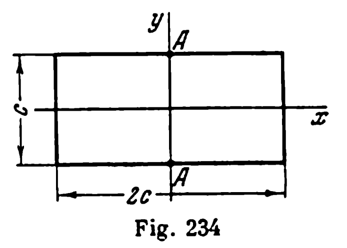


Fig. 234

En guise d'exemple, considérons un rectangle de côtés c et $2c$ (fig. 234):

$$J_x = \frac{2c \cdot c^3}{12}, \quad J_y = \frac{c \cdot (2c)^3}{12},$$

$$F = 2c^2.$$

Les coordonnées des points réels cherchés seront

$$a = 0,$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{\frac{c\,(2c)^3}{12} - \frac{2c \cdot c^3}{12}}{2c^2}} = \pm \frac{c}{2}.$$

Ces points (A) sont marqués sur la fig. 234. Tous les axes passant par ces points seront principaux.

40. S'il n'y a pas de contraintes dans la couche neutre OO, l'on pourra bien sûr scinder la poutre en deux parties sans que les déformations et les contraintes y subissent une quelconque altération; mais pour cela, il est indispensable de conserver les mêmes conditions d'application des efforts sur les extrémités de la poutre. C'est que, lorsque nous dessinons un moment sur les extrémités d'une poutre (comme on l'a fait, par exemple, sur la fig. 37), cela veut tout simplement dire que sur l'extrémité de la poutre, le moment résultant de l'action des contraintes est égal à M. Faisant cela, on évite ordinairement d'indiquer la loi de distribution sur l'extrémité même des contraintes se trouvant à l'origine de ce moment M.

Au reste, cela importe peu. De quelle façon que nous appliquions les charges, ces contraintes s'aplanissent assez vite au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité de la poutre et la loi de distribution prend la forme d'une fonction linéaire bien connue.

Sur la fig. 235 on a montré le changement progressif de la forme du diagramme des contraintes normales de l'extrémité de la poutre

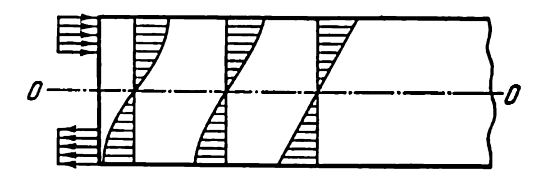


Fig. 235

jusqu'à son milieu. A l'extrémité de la poutre on a, en guise d'exemple, adopté arbitrairement une loi de distribution des contraintes par gradins. L'aplanissement a lieu sur un très court intervalle de la poutre, mais sur cet intervalle, dans la couche neutre *OO* agissent des contraintes tangentielles assez grandes.

Ici le problème est posé dans la forme où la façon dont les contraintes sont distribuées sur l'extrémité de la poutre dans l'un et l'autre cas n'est plus sans importance. La première variante de la poutre (fig. 37) suppose que les contraintes sur l'extrémité sont

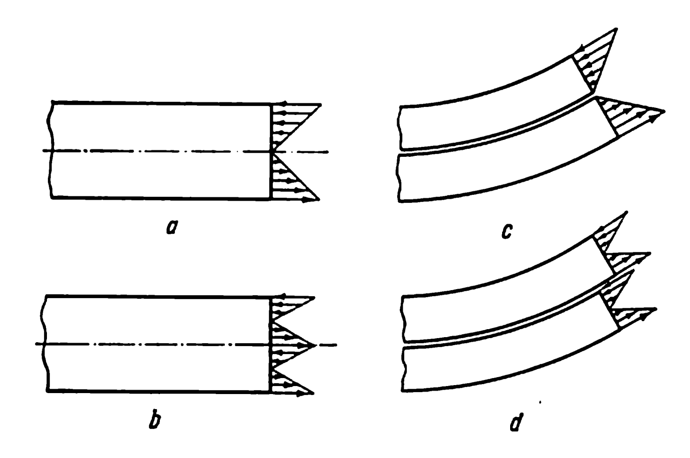


Fig. 236

distribuées selon une loi (fig. 236, *a* et *b*) ; la seconde variante (fig. 38), d'après une autre (fig. 236, *c* et *d*).

Si nous parvenons à assurer que la loi de distribution des contraintes sur l'extrémité de la poutre scindée soit également linéaire,

comme dans le cas d'une poutre entière (fig. 236, *c*), il sera possible de diviser la poutre en deux parties sans perturber son régime de

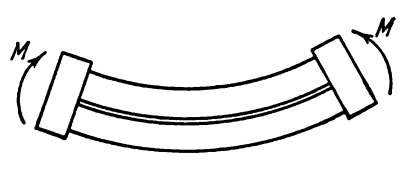


Fig. 237

travail. Techniquement, il n'est pas difficile de réaliser cela : il suffit, par exemple, d'assurer un encastrement rigide des deux parties scindées aux extrémités de la poutre (fig. 237).

41. Il s'agit du problème appelé le problème de Parent *). Comme

$$b^2 + h^2 = 4R^2,$$

le module de résistance d'une section transversale rectangulaire par rapport à l'axe x (fig. 238) sera

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b}{6}(4R^2 - b^2).$$

Cette valeur sera maximale pour $b = 2R/\sqrt{3}$ et, par conséquent, pour $h = b\sqrt{2}$.

Parent lui-même a fourni la réponse dans une forme commode pour un ouvrier travaillant à la hache. Il faut diviser le diamètre

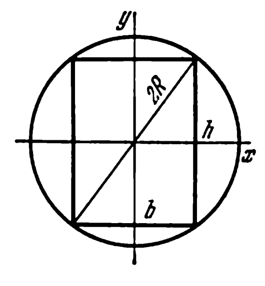


Fig. 238

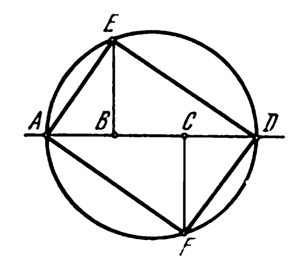


Fig. 239

du cercle (fig. 239) en trois parties et des points B et C lever des perpendiculaires jusqu'à l'intersection avec le cercle. Le rectangle $AEDF$ est la section de la poutre cherchée.

42. Pour que l'axe neutre du diagramme total des contraintes σ passe par le centre de gravité de la coupe $I - I$, la force doit passer par le centre de la courbure, c'est-à-dire $x = 0$.

*) Savant français (1666-1716).

Les contraintes de flexion dans une poutre de grande courbure se déterminent par la formule suivante

$$\sigma_{fl} = -\frac{My}{Fe(r+y)},$$

où r est la distance du centre de la courbure à l'axe neutre et e, la distance de l'axe neutre jusqu'au centre de gravité. Dans notre cas, $M = P(r + e + x)$. Au centre de gravité, c'est-à-dire pour $y = e$

$$\sigma_{fl} = -\frac{P(r+e+x)e}{Fe(r+e)}.$$

Par hypothèse, la somme algébrique de cette contrainte et de la contrainte de traction doit être nulle:

$$-\frac{P(r+e+x)}{F(r+e)} + \frac{P}{F} = 0,$$

d'où nous tirons

$$x = 0.$$

43. L'expression (1) découle de l'équation différentielle

$$y'' = \frac{M_{fl}}{EJ},$$

obtenue de l'expression (2) dans la supposition que les déplacements de la poutre sont petits:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \approx y''.$$

Par conséquent, strictement parlant, en flexion pure la poutre s'incurve selon un arc de cercle qui, dans les limites des petits déplacements, peut être avec une très grande précision représenté par une parabole carrée.

44. La forme d'un ski préalablement incurvé doit être la même que celle qui sera imprimée à un ski droit par une charge uniformément distribuée (fig. 240). Dans ce cas, la fonction cherchée y est

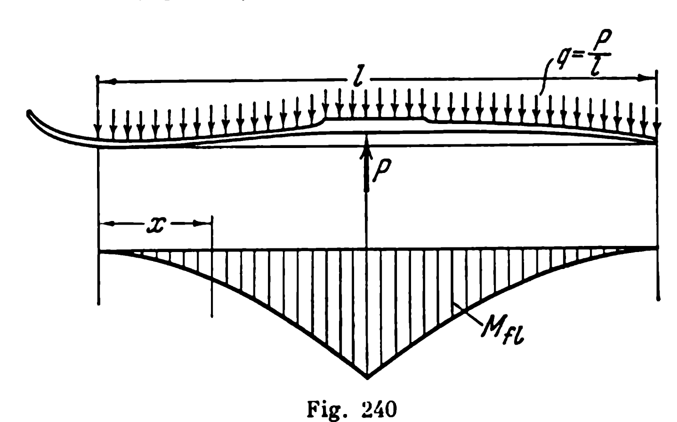


Fig. 240

donnée par l'équation

$$EJy'' = M_{fl} \tag{1}$$

avec pour conditions aux limites

$$y_{x=0} = 0, \quad y_{x=l} = 0.$$

Entre la rigidité EJ et x existe une dépendance assez compliquée. C'est pourquoi l'on procédera à l'intégration de l'équation (1) graphiquement.

Examinons un exemple. Les skis de montagne comportent une section variable sur leur longueur (cf. fig. 241). Traçons le graphe de variation du moment d'inertie J le long du ski (fig. 241, *a*). Ensuite, en posant pour le bois $E = 10^5$ kgf/cm^2 et en considérant que la charge appliquée sur le ski est égale à $P = 60$ kgf, traçons, d'après les fig. 240 et 241, la courbe de variation de la courbure M/EJ (fig. 241, *b*).

Intégrant deux fois cette courbe, obtenons une courbe

$$\int_0^x \int_0^x \frac{M\,dx}{EJ},$$

représentée sur la fig. 241, *c*. Les ordonnées comprises entre cette courbe et la droite OA donnent la fonction cherchée y satisfaisant aux conditions aux limites.

Sur la fig. 241, *d* cette courbe est portée sur l'axe horizontal et, avec cela, il a été obtenu

$$y_{\max} = 6 \text{ mm}.$$

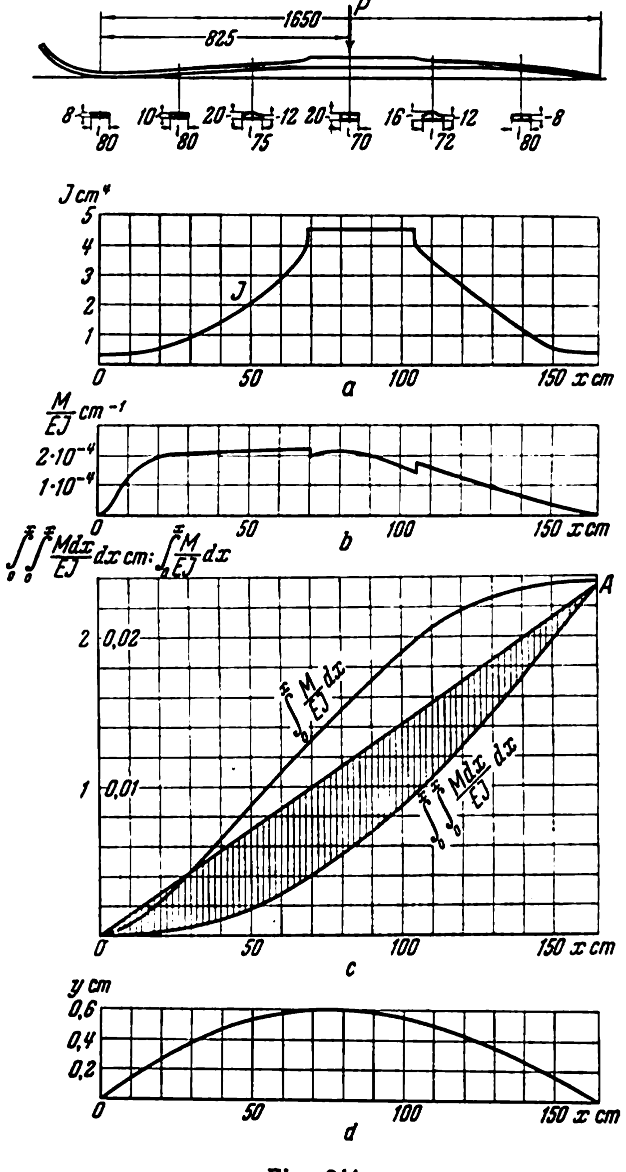
Lorsqu'on a affaire à une plus grande incurvation de départ, comme c'est habituellement le cas en pratique, la pression exercée sur la neige sera plus grande aux extrémités du ski qu'au milieu. S'il s'agit de skier sur une neige dure, cela garantit une meilleure maniabilité ainsi qu'une stabilité dans la marche. Cependant, si $y_{\max}$ devient trop grand, cela ne fait qu'empirer les conditions de glissement.

45. Appliquons dans le point A une force unitaire et multiplions l'épure unitaire avec celle de la force donnée (fig. 242).

Pour que δ_A soit nul, il faut que le centre de gravité de l'épure unitaire (c. gr.) coïncide avec le point zéro de l'épure donnée (fig. 242). Il est évident que $x = 1/3l$.

46. Avec la condition imposée, le déplacement du point A dans une direction perpendiculaire à la ligne d'action de la force est égal à zéro. De cette condition on détermine aussi l'angle α.

Appliquons dans le point A une force unitaire perpendiculaire à P et dessinons ensuite les épures des moments fléchissants (fig. 243).



1650
825
P
80
80
75
70
72
80
J cm⁴
J
0
50
100
150 x cm
a
b
c
d
0,6
0,4
0,2
y cm
0,02
0,01
A

Fig. 241

Multiplions ces épures entre elles et faisons s'annuler le déplacement obtenu ; de là nous obtenons

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 1, \quad \alpha = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8},$$

n étant un nombre entier quelconque.

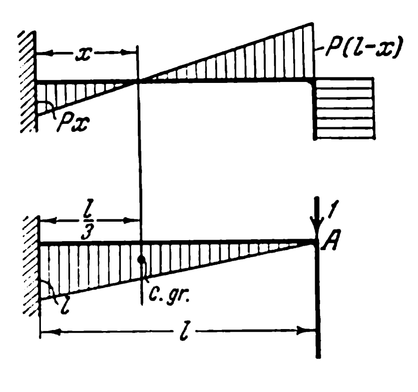


Fig. 242

47. a). Le point A (fig. 45, a) se déplacera en haut de $Pl^3/6EJ$.

b) Le point A (fig. 45, b) se déplacera à droite de $PR^3/2EJ$ et en haut de $\frac{PR^3}{EJ}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

c) Le point A (fig. 45, c) se déplacera en haut de $Pl^3/6EJ$ et à droite de Pl^3/EJ.

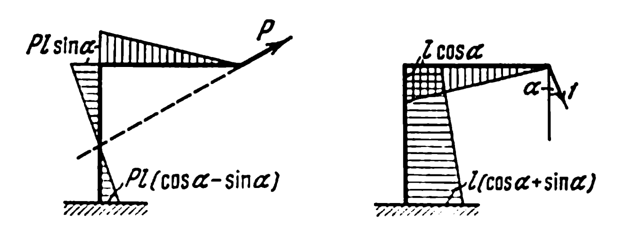


Fig. 243

d) Pour ce qui est de la fig. 45, d il est impossible de donner une réponse à la question posée tant qu'on n'aura pas assuré des liaisons excluant le déplacement du portique comme un tout rigide. Le déplacement du point A (fig. 244) changera en fonction de la nature de ces liaisons.

Conformément aux liaisons indiquées, nous aurons, par exemple :
dans le premier cas — à droite, de $Pl^3/16EJ$;
dans le second cas — à droite, de $Pl^3/8EJ$;
dans le troisième cas — à droite, de $3Pl^3/16EJ$ et, en bas, de $Pl^3/4EJ$.

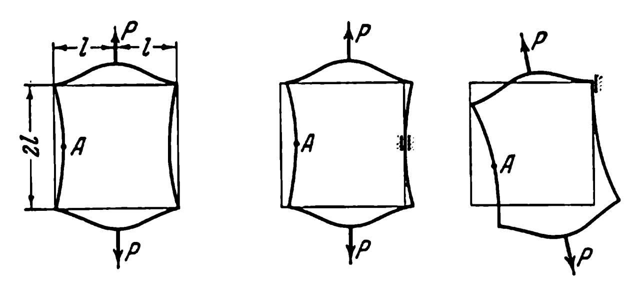


Fig. 244

48. Cf. fig. 245.

49. La barre AB est comprimée. Pour s'en convaincre, il faut lever l'hyperstaticité du portique. Les efforts dans l'articulation (fig. 246) seront

$$X_1 = -\frac{11}{285}P, \quad X_2 = \frac{48}{285}P.$$

50. La résultante de la force P et de la réaction de l'appui de droite passe par le point d'inflexion de la déformée de la barre (fig. 247). De cette condition, on détermine la réaction R. Les réactions restantes s'obtiennent des équations d'équilibre :

$$A = P, \quad B = R, \quad M = Ra$$

51. Le déplacement dans le point d'application de chacune des forces P (fig. 248) se détermine par la méthode habituelle et a la valeur suivante

$$\delta = \frac{PR^3}{\pi EJ}\left[\left(\frac{3\pi^2}{8} - \pi - \frac{1}{2}\right) + \alpha\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi - 2\right) + \alpha^2\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) + \alpha^3\frac{\pi}{3}\right],$$

avec $\alpha = a/R$.

Le déplacement δ atteint sa valeur la plus petite pour $\alpha = 0{,}148$.

52. Les déplacements du point A seront pour les trois portiques :

$$\delta_{I} = \frac{Pa^3}{3EJ}, \quad \delta_{II} = \frac{Pa^3}{2}\left(\frac{\pi - 3}{GJ_p} + \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{EJ}\right),$$

$$\delta_{III} = \frac{Pa^3\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\frac{1}{GJ_p} + \frac{1}{3EJ}\right).$$

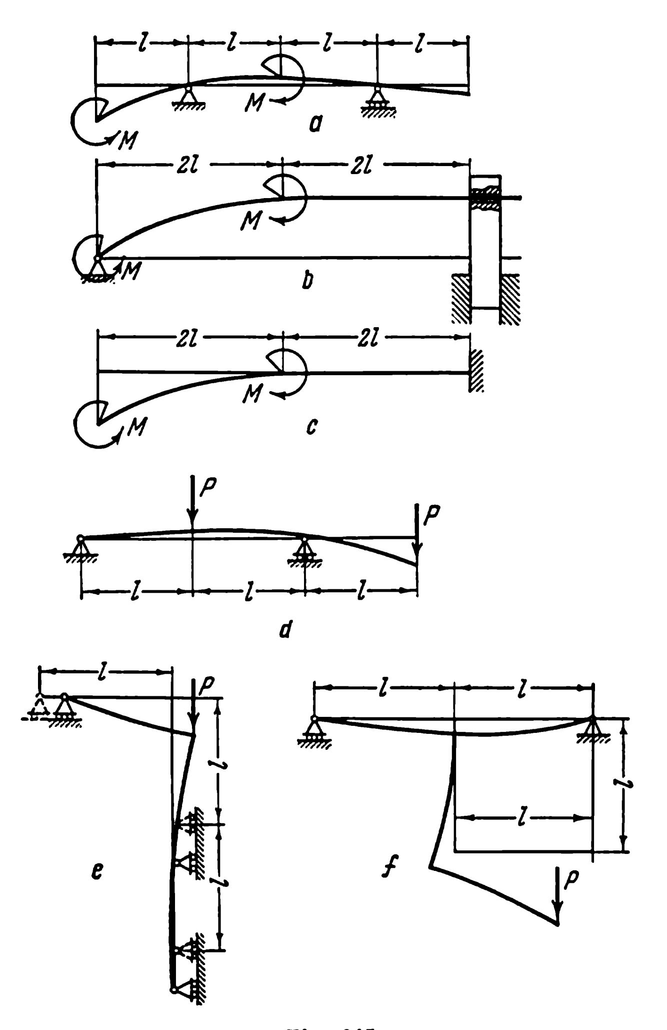


Fig. 245

Pour une poutre de section circulaire, c'est-à-dire pour $EJ/GJ_p = 1{,}3$, nous aurons

$$\delta_{II} = 1{,}13\delta_I, \quad \delta_{III} = 1{,}72\delta_I.$$

Ainsi, le portique I est le plus rigide.

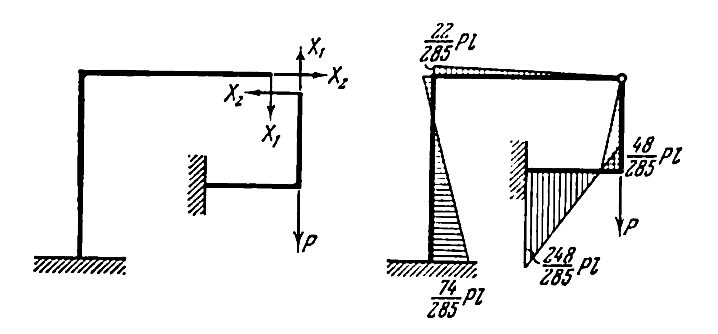


Fig. 246

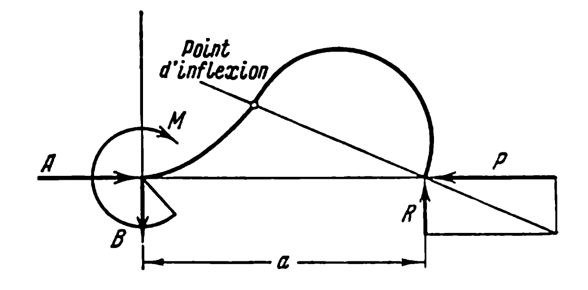


Fig. 247

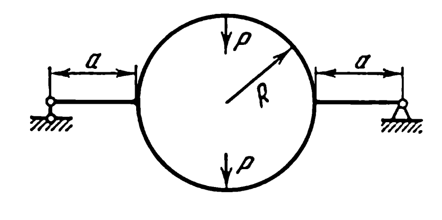


Fig. 248

53. Si dans un anneau fermé est pratiquée une articulation, la rigidité de cet anneau ne peut que diminuer. Dans le cas extrême, elle restera égale à la rigidité de l'anneau fermé. Ceci aura lieu

dans le seul cas où l'articulation se retrouve dans le point même où le moment fléchissant de l'anneau fermé est nul (fig. 249).

L'angle cherché est égal à arcsin $\frac{2}{\pi}$.

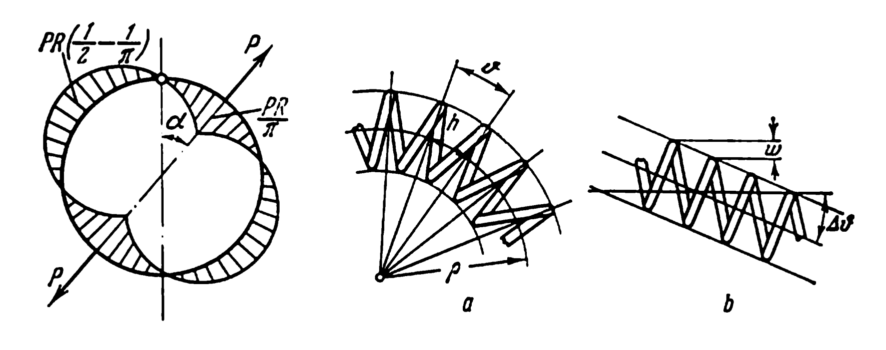


Fig. 249

Fig. 250

54. Le problème proposé peut être résolu de deux façons.

La première méthode, valable aussi pour les ressorts dotés d'un grand angle d'élévation des spires, consiste en ceci que le ressort est considéré comme une poutre tridimensionnelle. Les déplacements se déterminent par la méthode de Mohr. Avec cela, la difficulté principale réside dans le caractère compliqué des relations géométriques.

La seconde méthode, simplifiée, dont nous nous servirons ici, consiste en ceci que le ressort est remplacé par une certaine poutre droite qui lui est équivalente. La rigidité en flexion de cette poutre se calcule en fonction de l'écartement réciproque des spires (fig. 250,*a*). Outre les déplacements de flexion, la poutre se caractérise par des déplacements sensibles de cisaillement dans un plan vertical (fig. 250, *b*).

Pour déterminer la rigidité en flexion et en cisaillement de la poutre équivalente, examinons une spire du ressort en supposant que l'angle d'élévation est nul. Divisons la spire au moyen de sections situées dans un plan vertical (fig. 251, *a*). Dans les sections situées aux abouts de la spire, on aura des moments M et des forces Q. Leurs valeurs se déterminent facilement des conditions d'équilibre de la partie découpée du ressort. Le moment M est à l'origine d'un angle de virage réciproque des sections égal à ϑ (fig. 251, *b*), dont la valeur est donnée par l'intégrale de Mohr

$$\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{M_t M_{t1} R\, d\varphi}{GJ_p} + \int_0^{2\pi} \frac{M_f M_{f1} R\, d\varphi}{EJ},$$

ici, les moments fléchissant et de torsion, comme on le voit sur la fig. 251, *c*, sont égaux à

$$M_t = M \cos\varphi \quad \text{et} \quad M_{fl} = M \sin\varphi.$$

Les moments créés par des facteurs unitaires auront des valeurs

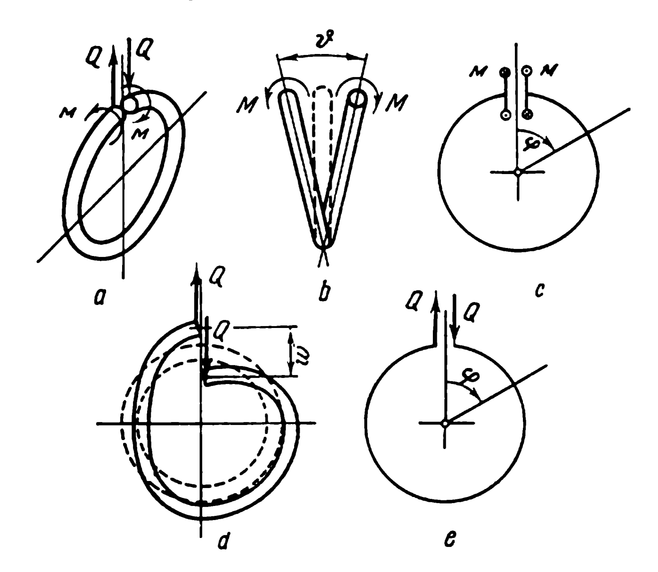


Fig. 251

correspondantes

$$M_{t1} = \cos\varphi, \quad M_{fl1} = \sin\varphi.$$

Après intégration, nous obtenons

$$\vartheta = \frac{M\pi D}{2}\left(\frac{1}{GJ_p} + \frac{1}{EJ}\right)$$

ou

$$\vartheta = \frac{32MD}{Ed^4}(2+\mu).$$

Comme cela découle de la fig. 250, *a*, $1/\rho = \vartheta/h$, h étant l'espacement des spires du ressort. Si le nombre de spires est égal à n, nous aurons $h = l/n$. Alors,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\vartheta n}{l}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\dfrac{Ed^4 l}{32Dn(2+\mu)}}.$$

La grandeur

$$\frac{Ed^4l}{32Dn(2+\mu)}$$

peut être considérée comme la rigidité en flexion de la poutre équivalente. Désignons-la par C_{fl}:

$$\frac{Ed^4l}{32Dn(2+\mu)} = C_{fl} \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{C_{fl}} \tag{2}$$

Les déplacements de cisaillement sont dus à la flexion de la spire dans son plan (fig. 251, *d*). Il est évident que

$$w = \int_0^{2\pi} \frac{M_{fl} M_{fl1} R \, d\varphi}{EJ}.$$

où

$$M_{fl} = QR \sin\varphi, \quad M_{fl1} = R \sin\varphi.$$

Après intégration, nous obtenons

$$w = \frac{QD^3\pi}{8EJ}.$$

Le déplacement angulaire supplémentaire sera

$$\Delta\vartheta = \frac{w}{h} = \frac{Q}{\frac{Ed^4l}{8D^3n}}.$$

On peut écrire cette expression sous la forme suivante

$$\Delta\vartheta = \frac{Q}{C_{cis}}, \tag{3}$$

dans laquelle

$$C_{cis} = \frac{Ed^4l}{8D^3n}. \tag{4}$$

Le fléchissement du ressort sous l'action des forces transversales sera égal à

$$f = f_{fl} + f_{cis}.$$

Dans le cas étudié d'une poutre encastrée à l'une de ses extrémités, le déplacement de flexion est égal à

$$f_{fl} = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

ici, à la valeur EJ doit être substituée C_{fl}.

Le déplacement de cisaillement sera

$$f_{cis} = \Delta\vartheta l = \frac{Pl}{C_{cis}}.$$

Ainsi,

$$f = \frac{Pl^3}{3C_{fl}} + \frac{Pl}{C_{cis}}.$$

Les valeurs de C_{fl} et C_{cls} se déterminent par les expressions (1) et (4). Le problème concernant d'autres formes de chargement se résout d'une façon analogue.

55. Le centre de gravité du ressort doit coïncider avec l'axe du balancier.

Après avoir détaché la plaque, étudions la partie intérieure du ressort (fig. 252). Opérons une section A et appliquons-y un moment fléchissant M, une force normale N ainsi qu'un effort tranchant Q. Ces mêmes efforts agiront aussi sur la plaque.

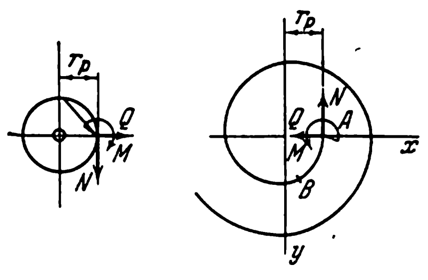


Fig. 252

Dans le point B ayant pour coordonnées x, y le moment fléchissant créé par ces efforts sera évidemment $M_{fl} = M + Qy + N(r_p - x)$, r_p étant le rayon de la plaque.

Si la plaque se retourne d'un petit angle φ contre les aiguilles d'une montre, la section A se retourne aussi de l'angle φ. En plus de cela, elle se déplacera d'une valeur $r_p\varphi$ sur l'axe y. Quant à son déplacement sur l'axe x, il sera, pour de petits déplacements, d'une valeur d'un ordre plus grand de petitesse. Exprimons les déplacements par intégrales par l'intermédiaire des moments fléchissants:

$$\frac{1}{EJ}\int_s M_{fl}M_{1M}\,ds = \varphi,$$

$$\frac{1}{EJ}\int_s M_{fl}M_{1N}\,ds = r_p\varphi,$$

$$\frac{1}{EJ}\int_s M_{fl}M_{1Q}\,ds = 0,$$

où M_{1M}, M_{1N} et M_{1Q} sont les moments fléchissants créés par les efforts unitaires correspondant au moment M et aux efforts N et Q, c'est-à-dire $M_{1M} = 1$, $M_{1N} = r_p - x$, $M_{1Q} = y$.

L'intégration s'étend sur la longueur de tout le ressort. Par conséquent, nous aurons

$$\int_s [M + Qy + N(r_p - x)]\,ds = EJ\varphi,$$

$$\int_s [M + Qy + N(r_p - x)](r_p - x)\,ds = EJr_p\varphi,$$

$$\int_s [M + Qy + N(r_p - x)]\,y\,ds = 0,$$

ou, après intégration:

$$Ml + QS_x + N(r_p l - S_y) = EJ\varphi,$$
$$M(r_p l - S_y) + Q(r_p S_x - J_{xy}) + N(r_p^2 l - 2r_p S_y + J_y) = EJr_p\varphi,$$
$$MS_x + QJ_x + N(r_p S_x - J_{xy}) = 0,$$

où

$$S_x = \int_s y\,ds, \quad S_y = \int_s x\,ds,$$

$$J_x = \int_s y^2\,ds, \quad J_{xy} = \int_s xy\,ds, \quad J_y = \int_s x^2\,ds,$$

l est la longueur de la bande. Posons $Q = N = 0$. Nous aurons alors: $Ml = EJ\varphi$ et $S_x = S_y = 0$. Cette dernière condition signifie que les axes x et y doivent passer par le centre de gravité du ressort.

Puisque le centre de gravité de la spirale d'Archimède, telle est la forme du ressort en question, ne coïncide pas avec le centre

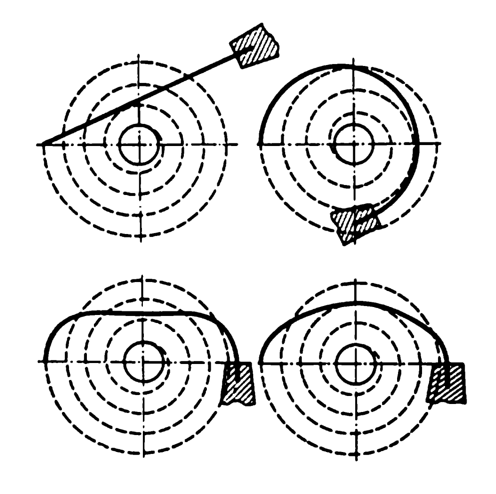


Fig. 253

de rotation de la plaque, dans l'industrie horlogère, dans le but d'observer la condition indiquée, on a recours à un dispositif du ressort du balancier doté d'une extrémité externe repliée. Sur la fig. 253 on a montré les types de tels ressorts.

56. La question principale qui se pose lorsqu'on résout ce problème est de découvrir le caractère de contact des plaques du ressort.

Supposons que les plaques reliées contactent dans un point situé au bout de la plus petite plaque; supposons, en outre, qu'elles contactent dans un point de liaison dans lequel le déplacement vertical

et l'angle de rotation sont respectivement égaux pour les deux plaques. Le schéma correspondant des efforts est montré sur la fig. 254, *a*. Pour des plaques non reliées, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$.

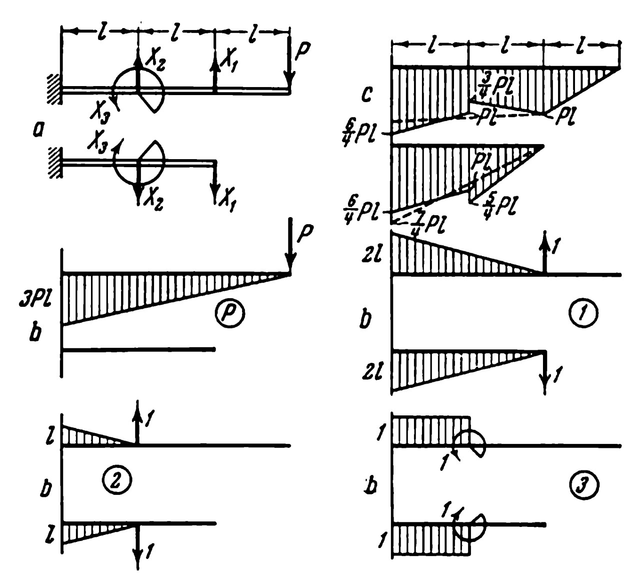


Fig. 254

Multipliant entre elles les épures unitaires des moments (fig. 254, *b*), nous obtenons

$$EJ\delta_{11} = \frac{16}{3} l^3, \qquad EJ\delta_{12} = \frac{5}{3} l^3, \qquad EJ\delta_{13} = 3l^2 ;$$

$$EJ\delta_{22} = \frac{2}{3} l^3, \qquad EJ\delta_{23} = l^2, \qquad EJ\delta_{33} = 2l ;$$

$$EJ\delta_{1p} = -\frac{14}{3} Pl^3, \quad EJ\delta_{2p} = -\frac{4}{3} Pl^3, \quad EJ\delta_{3p} = -\frac{5}{2} Pl^2.$$

En résolvant les équations de la méthode des forces

$$\frac{16}{3} X_1 l + \frac{5}{3} X_2 l + 3X_3 = \frac{14}{3} Pl,$$

$$\frac{5}{3} X_1 l + \frac{2}{3} X_2 l + X_3 = \frac{4}{3} Pl,$$

$$3X_1 l + X_2 l + 2X_3 = \frac{5}{2} Pl$$

trouvons

$$X_1 = \frac{5}{4} P, \quad X_2 = -\frac{3}{4} P, \quad X_3 = -\frac{1}{4} Pl.$$

Pour des plaques non reliées

$$X_1=\frac{7}{8}P, \quad X_2=0, \quad X_3=0.$$

Sur la fig. 254, *c* les lignes continues montrent les épures résultantes pour des plaques reliées, tandis que les pointillés montrent ces mêmes épures pour des plaques libres.

Maintenant, il faut vérifier la véracité de la supposition faite quant à la nature du contact des plaques. Examinons d'abord les épures en pointillé (fig. 254, *c*). Le moment fléchissant et, par conséquent, l'incurvation de la plaque inférieure dans la zone d'encastrement sont plus grands que l'incurvation de la plaque supérieure. Cela signifie que la déformée de la plaque inférieure se situera plus bas que la déformée de la plaque supérieure, ce qui correspond à la supposition faite.

Pour des plaques reliées, les épures sont exactement identiques sur la première tranche. Par conséquent, ici aura lieu un contact total sans action réciproque des forces, ce qui également ne contredit pas la supposition faite. Sur la deuxième tranche, la déformée de la plaque inférieure passe plus bas que la déformée de la plaque supérieure.

Ainsi, la supposition faite quant à la nature du contact entre les plaques se trouve confirmée par le résultat obtenu.

Le déplacement du point d'application des forces P se détermine en multipliant l'épure résultante de la plaque supérieure par l'épure unitaire, et est égal à : 118 $Pl^3/24\ EJ$, pour les plaques non reliées; 115 $Pl^3/24\ EJ$, pour les plaques reliées.

Le fait de relier les plaques a diminué le moment fléchissant maximal de 7/4 Pl à 6/4 Pl.

57. Examinons la moitié droite du ressort en supposant que les plaques contactent dans les points A et B (fig. 255, *a*).

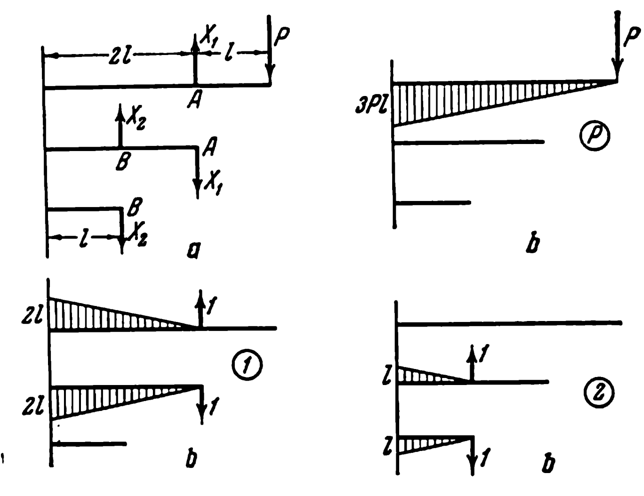


Fig. 255

Déterminons les forces X_1 et X_2 des équations de la méthode des forces:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = -\delta_{1p}, \quad \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -\delta_{2p}. \qquad (1)$$

Les coefficients δ_{11}, δ_{12}, δ_{22}, δ_{1p} et δ_{2p} se déterminent en multipliant les épures entre elles (fig. 234, *b*):

$$EJ\delta_{11} = \frac{16}{3} l^3, \quad EJ\delta_{12} = -\frac{5}{6} l^3,$$

$$EJ\delta_{22} = \frac{2}{3} l^3,$$

$$EJ\delta_{1p} = -\frac{14}{3} Pl^3, \quad \delta_{2p} = 0.$$

Maintenant, des équations (1), trouvons X_1 et X_2:

$$X_1 = \frac{112}{103} P, \quad X_2 = \frac{140}{103} P.$$

Les épures résultantes des moments fléchissants sont montrées sur la fig. 256.

De l'examen de ces épures, il ressort que le moment fléchissant dans le lieu d'encastrement et, par conséquent, l'incurvation de la première plaque sont plus grands que l'incurvation de la seconde plaque. Cela signifie que la déformée de la deuxième plaque doit, dans ces conditions, se situer plus haut que la déformée de la première plaque. Cela cependant ne peut avoir lieu. Par conséquent, la supposition faite plus haut quant à la nature du contact entre les plaques est fausse, et le schéma de calcul doit être modifié.

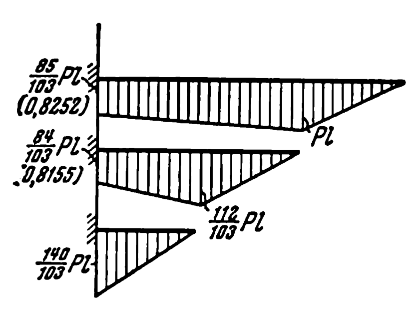


Fig. 256

Supposons maintenant que la première et la deuxième plaque contactent en deux points: comme auparavant, dans le point *A* et, de plus, dans un point *C* situé à une certaine distance *a* de l'encastrement (fig. 257).

Ajoutant aux épures de la fig. 255, *b* l'épure unitaire correspondant aux forces X_3 (fig. 258), déterminons les coefficients des équations de la méthode des forces:

$$EJ\delta_{11} = \frac{16}{3} l^3, \qquad EJ\delta_{12} = -\frac{5}{6} l^3, \qquad EJ\delta_{13} = a^2\left(2l - \frac{a}{3}\right),$$

$$EJ\delta_{22} = \frac{2}{3} l^3, \qquad EJ\delta_{23} = -\frac{a^2}{2}\left(l - \frac{a}{3}\right), \quad EJ\delta_{33} = \frac{2}{3} a^3,$$

$$EJ\delta_{1p} = -\frac{14}{3} Pl^3, \quad \delta_{2p} = 0, \qquad EJ\delta_{3p} = -\frac{a^2}{2}\left(3l - \frac{a}{3}\right) P$$

(l'on suppose que $a \leqslant l$). Dans ce cas le système des équations prend la forme suivante :

$$32X_1 - 5X_2 + 2\alpha^2(6-\alpha)X_3 = 28P,$$
$$-5X_1 + 4X_2 - \alpha^2(3-\alpha)X_3 = 0,$$
$$2(6-\alpha)X_1 - (3-\alpha)X_2 + 4\alpha X_3 = (9-\alpha)P$$

avec $\alpha = a/l$. Résolvons ces équations par rapport à X_1, X_2 et X_3 ;

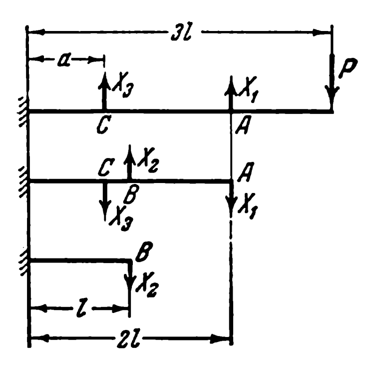


Fig. 257

Fig. 258

trouvons

$$X_1 = \frac{P}{\Delta}(448 - 549\alpha + 228\alpha^2 - 31\alpha^3),$$
$$X_2 = \frac{P}{\Delta}(560 - 684\alpha + 270\alpha^2 - 34\alpha^3),$$
$$X_3 = \frac{P}{\Delta}\frac{1}{\alpha}(3 - 19\alpha), \quad \Delta = 412 - 504\alpha + 204\alpha^2 - 28\alpha^3.$$

La valeur de a (et, par conséquent, de α) se détermine de la condition d'égalité des angles de rotation de la première et de la seconde plaque dans le point C.

Appliquant dans ce point un moment unitaire (fig. 259) et multipliant entre elles les épures correspondantes, nous obtenons

$$a\left(3l - \frac{a}{2}\right)P - a\left(2l - \frac{a}{2}\right)X_1 - \frac{a^2}{2}X_3 =$$
$$= a\left(2l - \frac{a}{2}\right)X_1 - a\left(l - \frac{a}{2}\right)X_2 + \frac{a^2}{2}X_3,$$
$$2(4-\alpha)X_1 - (2-\alpha)X_2 + 2\alpha X_3 = (6-\alpha)P.$$

En mettant dans ces équations les valeurs de X_1, X_2 et X_3 obtenues, on a

$$3\alpha^3 - 15\alpha^2 + 19\alpha - 1 = 0;$$

de là $\alpha = 0{,}054993 < 1$. Si α était plus grand que 1, il aurait fallu répéter le calcul en supposant $a > l$.

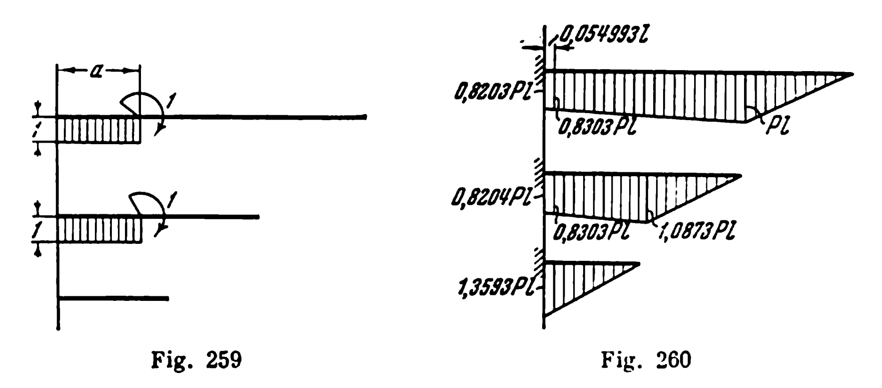


Fig. 259

Fig. 260

Pour la valeur de α trouvée, déterminons X_1, X_2 et X_3:

$$X_1 = 1{,}0873P, \quad X_2 = 1{,}3593P, \quad X_3 = 0{,}09237P.$$

Remarquons que pour le rapport donné des longueurs des plaques, les forces X_1 et X_2 ne diffèrent presque pas de celles obtenues auparavant.

Construisons de nouveau les épures des moments fléchissants (fig. 260).

De l'examen de ces épures il ressort que l'incurvation de la deuxième plaque dans la zone d'encastrement est plus grande que celle de la première tandis que l'incurvation de la troisième plaque est plus grande que celle de la deuxième. Conformément à cela, la déformée de chaque plaque successive se situera plus bas que la déformée de la plaque précédente. Ainsi, la supposition faite quant à la nature du contact des plaques se trouve confirmée.

Le moment fléchissant de calcul est égal à $M_{\text{fl}}^{\max} = 1{,}36Pl$; il agit dans la zone d'encastrement de la plaque inférieure.

L'aplatissement du ressort déterminé par le déplacement de l'extrémité de la première plaque est égal à

$$EJ\delta = 9Pl^3 - \frac{14}{3} X_1 l^3 - \frac{1}{6} X_3 a^2 (9l - a),$$

d'où

$$\delta = 3{,}926 \frac{Pl^3}{EJ}.$$

58. Supposons que sur un certain intervalle on impose au ressort la forme d'un pistolet à dessin. Pour cela, il faut évidemment appliquer aux extrémités de cet intervalle certains efforts et moments et, dans les points intermédiaires, une charge distribuée d'intensité q.

Des propriétés de la déformée on sait que

$$q(x) = EJy^{(\mathrm{IV})}.$$

Dans cette équation, si la charge distribuée est dirigée vers le haut, l'on convient que $q(x) > 0$.

Ceci étant dit, il devient assez évident que pour $y^{IV} > 0$ le ressort ne touche pas le pistolet à dessin et pour $y^{IV} < 0$, colle sur lui. Si $y^{IV} = 0$ (le pistolet à dessin se présente comme la courbe d'une fonction exponentielle d'une puissance ne dépassant pas le troisième degré), le ressort collera compactement sur certain intervalle du pistolet à dessin sans pour autant exercer une pression sur lui. A l'extrémité de cet intervalle apparaîtra une certaine force concentrée P_1 (fig. 261).

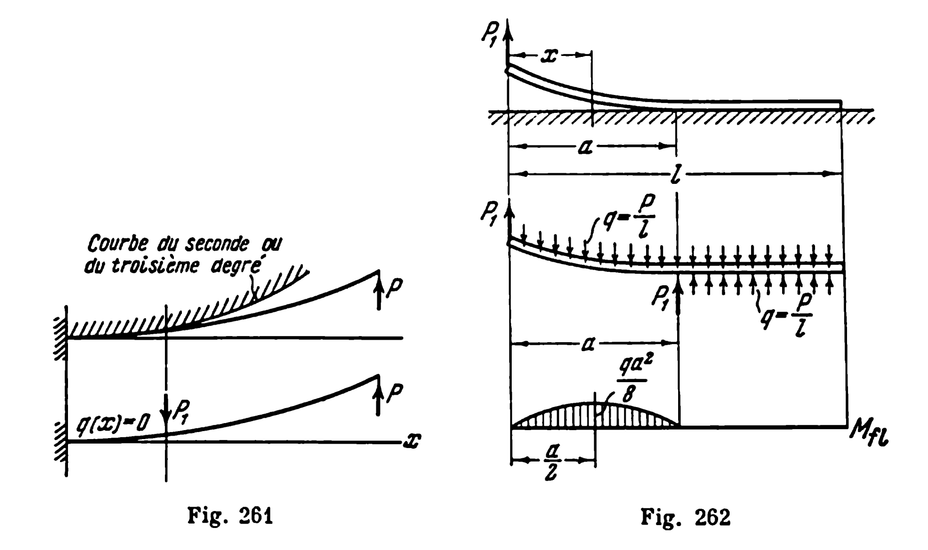


Fig. 261

Fig. 262

59. Après application de la force P_1, la partie gauche de la poutre se soulèvera sur une certaine longueur a (fig. 262). La partie de droite continuera à reposer sur l'assise et restera droite. Par conséquent, dans toutes les sections de la branche droite, le moment fléchissant sera nul. En particulier, il le sera aussi dans la section $x = a$.

De cette condition se détermine la longueur de l'intervalle a, c'est-à-dire (voir fig. 262)

$$P_1 a = \frac{P}{l}\frac{a^2}{2}, \quad a = \frac{2P_1}{P}\, l.$$

De la condition d'égalité à zéro de la somme des projections de toutes les forces sur l'axe vertical il découle que dans le point $x = a$ l'assise rigide donne une réaction égale à P_1 (fig. 262).

Pour un tel système de forces, on peut considérer la partie de gauche pendante de la poutre comme une poutre à l'appui libre de longueur a, sollicitée par une charge uniformément répartie d'intensité P/l. Le moment fléchissant sera maximal au milieu de la bran-

che pendante et égal à

$$\frac{qa^2}{8}=\frac{P_1^2 l}{2P}.$$

Pour $P_1=P/3$, nous obtenons:

$$M_{\max}=\frac{Pl}{18}, \quad \sigma_{\max}=\frac{Pl}{18W}, \quad a=\frac{2}{3}l.$$

Le fait le plus intéressant et le plus instructif dans le problème étudié ainsi que d'ailleurs dans tous les problèmes où il s'agit de contact entre une poutre flexible et une assise rigide, réside dans l'apparition d'une force concentrée P_1 à l'extrémité de la ligne de contact.

A première vue, l'apparition d'une telle force est quelque peu inattendue malgré que, formellement, son existence se trouve en parfait accord avec les équations d'équilibre et de déformation. L'apparition de cette force est conditionnée par le choix du diagramme de calcul. Lors de la résolution du problème, on n'avait examiné que la rigidité en flexion de la poutre en supposant qu'il n'y avait pas de déformations de cisaillement dans les sections transversales. La prise en considération de ces déformations suffit déjà pour découvrir que la schématisation des forces de contact sous forme de charge répartie et de force concentrée P_1, est une approximation. Avec cela, on n'a même pas besoin d'accorder de l'importance au fait qu'à la suite d'une compression subie par la poutre dans une direction transversale (comme dans tous les problèmes de contact ordinaires) la force P_1 sera répartie sur une certaine surface limitée.

Examinons les déformations de cisaillement dans la poutre.

La courbure de la poutre due au moment fléchissant se détermine par la valeur

$$\frac{1}{\rho}=y''_M=\frac{M}{EJ}.$$

Si l'on désigne par y_Q les flexions dues au cisaillement, nous aurons pour n'importe quelle section un angle d'inclinaison supplémentaire de la déformée, égal à

$$y'_Q=-\frac{kQ}{GF},$$

k étant un coefficient numérique dépendant de la forme de la section transversale de la poutre. Pour un rectangle par exemple, $k=6/5$, pour un cercle, $k=10/9$ etc. Ainsi, nous aurons

$$y''=\frac{M}{EJ}-\frac{kQ'}{GF}.$$

Le signe moins devant kQ'/GF a été mis pour cette raison-ci que, pour des valeurs positives de M et Q, ces deux derniers facteurs donnent un changement de courbure de signe différent (fig. 263).

Comme $Q = dM/dx$, l'équation différentielle obtenue plus haut prend la forme suivante

$$y'' = \frac{M}{EJ} - \frac{kM''}{GF}. \qquad (1)$$

Dans le problème étudié, pour $x < a$,

$$M = P_1 x - \frac{Px^2}{2l}, \quad M'' = -\frac{P}{l}. \qquad (2)$$

Conformément à l'équation (1), nous obtenons $y'' = \frac{1}{EJ} \times \times \left[P_1 x - \frac{Px^2}{2l}\right] + \frac{kP}{lGF}$, d'où

$$y = \frac{1}{EJ}\left[P_1 \frac{x^3}{6} - \frac{Px^4}{24l}\right] + \frac{kP}{lGF} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \qquad (3)$$

La constante C_2 ne présente aucun intérêt. Elle peut facilement être choisie de telle façon que, pour $x = a$, le déplacement y soit

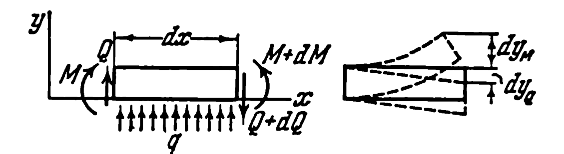


Fig. 263

nul. Pour ce qui est de la constante C_1, pour la déterminer il faut remplir une condition particulière de jonction avec la seconde branche sur laquelle l'incurvation est nulle. Par conséquent, selon (1)

$$M'' - \alpha^2 M = 0, \quad \text{où} \quad \alpha^2 = \frac{GF}{EJk}, \qquad (4)$$

d'où

$$M = C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x. \qquad (5)$$

Si $x = a$, $M = P_1 a - Pa^2/2l$; si $x = 1$, $M = 0$. De ces conditions déterminons les constantes arbitraires C_3 et C_4:

$$M = \left(P_1 a - \frac{Pa^2}{2l}\right) \frac{\operatorname{sh} \alpha (l-x)}{\operatorname{sh} \alpha (l-a)}. \qquad (6)$$

Il faut ensuite exiger que, en jonction, l'angle de rotation de la section de contact soit le même. Or, cet angle θ diffère d'une valeur égale à kQ/GF de l'angle de pente de la tangente à la déformée, c'est-à-dire

$$\theta = y' + \frac{kQ}{GF}.$$

Déterminons pour la partie gauche de la poutre l'angle θ pour $x = a$. Pour cela, utilisons l'expression (3). Nous aurons

$$\theta = \frac{1}{EJ}\left(P_1\frac{a^2}{2} - \frac{Pa^3}{6l}\right) + \frac{kP}{lGF}a + C_1 + \frac{k}{GF}\left(P_1 - \frac{Pa}{l}\right).$$

Pour la partie droite de la poutre, $y' \equiv 0$. C'est pourquoi l'angle θ ne comporte que la composante de cisaillement. De l'équation (6) nous obtenons

$$\theta = \frac{k}{GF}\alpha\left(P_1 a - \frac{Pa^2}{2l}\right)\operatorname{cth}\alpha(l-a).$$

Posant les angles θ égaux, nous trouvons

$$C_1 = -\frac{1}{EJ}\left(P_1\frac{a^2}{2} - \frac{Pa^3}{6l}\right) - \frac{kP_1}{GF} - \frac{k\alpha}{GF}\left(P_1 a - \frac{Pa^2}{2l}\right)\operatorname{cth}\alpha(l-a).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier si la déformée de la branche de gauche satisfait à la condition de non-intersection avec la surface d'appui. Le fait est que, quand il y a cisaillement, la déformée de la poutre présente une discontinuité dans le point d'application des charges concentrées. Mais jusqu'à présent nous ne savons pas si une force concentrée apparaît ou non dans la zone de contact. Si une telle force apparaît et est dirigée vers le haut (or, elle ne peut qu'être dirigée en haut), la pointe de la cassure sera elle aussi dirigée vers le haut, et la déformée de la branche de gauche de la poutre coupera la surface d'appui. Tout dépend du signe de y' au voisinage du point de jonction. Ainsi, il faut remplir la condition : $y' \leqslant 0$ pour $x = a$.

Tenant compte de la valeur obtenue de C_1 et moyennant l'expression (3), on a

$$y'_{x=a} = \frac{k}{GF}\left[P\frac{a}{l} - P_1 - \alpha l\frac{a}{l}\left(P_1 - \frac{1}{2}P\frac{a}{l}\right)\operatorname{cth}\alpha l\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right].$$

Il apparaît que pour $P_1 = P/3$ et avec la valeur de a trouvée auparavant $a = 2/3\ l$, la dérivée de y est positive et la déformée coupe la surface d'appui. On peut, en diminuant la valeur de a, obtenir une valeur négative de y'. Dans ce cas, la déformée dans le point de jonction aura une cassure dont la pointe sera dirigée en bas. Or, cela signifie que pour $x = a$ les forces de réaction comportent une composante concentrée dirigée en bas, ce qui est impossible dans le cas de liaisons unidirectionnelles. Il ne reste qu'une seule possibilité : prendre y' égal à zéro pour $x = a$ et, de cette condition, déterminer a.

Par conséquent,

$$\frac{P_1}{P} - \frac{a}{l} = -\alpha l\cdot\frac{a}{l}\cdot\frac{\frac{P_1}{P} - \frac{1}{2}\frac{a}{l}}{\operatorname{th}\alpha l\left(1 - \frac{a}{l}\right)}.$$

D'après les données du problème, $P_1/P = 1/3$, c'est pourquoi

$$\frac{1}{3}-\frac{a}{l}=-\alpha l\,\frac{a}{l}\,\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{a}{l}}{\operatorname{th}\alpha l\left(1-\frac{a}{l}\right)}. \qquad (7)$$

De cette équation transcendante on détermine a/l pour une valeur donnée de

$$\alpha l=\sqrt{\frac{GFl^2}{EJk}}.$$

Si $\alpha l = \infty$, c'est-à-dire si la poutre ne connaît pas de déformations de cisaillement, de (7) trouvons $a/l = 2/3$, ce qui avait été obtenu auparavant. Pour $\alpha l = 50$, obtenons: $a/l = 0{,}646$, et pour $\alpha l = 10$, nous aurons: $a/l = 0{,}58$.

Déterminons maintenant la charge distribuée q agissant sur la seconde branche de la poutre (q est la différence entre la réaction répartie de l'assise et le poids propre P/l). De (5), nous obtenons

$$q=M''=\frac{P}{l}\,\frac{a}{l}\,\alpha^2l^2\left(\frac{P_1}{P}-\frac{1}{2}\,\frac{a}{l}\right)\frac{\operatorname{sh}\alpha(l-x)}{\operatorname{sh}\alpha(l-a)}.$$

Pour $x = l$ $q = 0$, c'est-à-dire la réaction d'appui de l'assise est égale au poids de la poutre par unité de longueur. Pour $x = a$, nous aurons

$$q_a=\frac{P}{l}\,\frac{a}{l}\,\alpha^2l^2\left(\frac{P_1}{P}-\frac{1}{2}\,\frac{a}{l}\right).$$

Avec l'augmentation de αl, c'est-à-dire de la rigidité en cisaillement, q_a tend vers l'infini et, à la limite, pour $\alpha l = \infty$, dans le point $x = a$, nous obtenons une force concentrée.

Sur la fig. 264 on a montré comment change la loi de répartition des réactions d'appui en fonction de l'accroissement de αl.

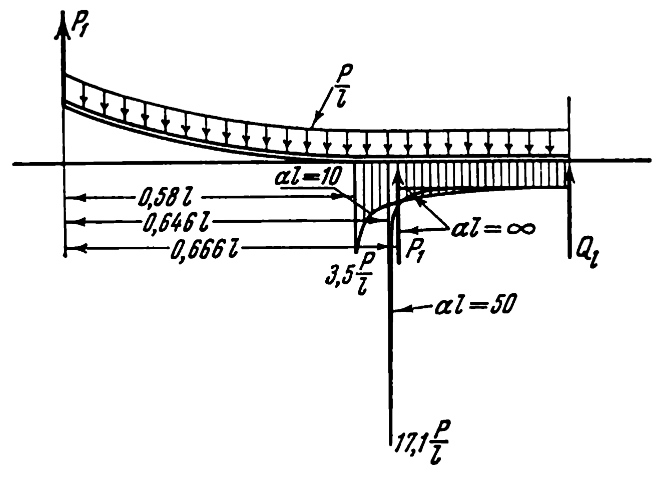


Fig. 264

Il est curieux de remarquer que les déplacements de cisaillement dans la poutre ont perturbé la distribution des efforts de contact non seulement dans la zone de transition, mais encore au-delà de celle-ci. Maintenant une force concentrée de réaction apparaît à l'extrémité droite de la poutre. Dérivant l'expression (6), nous obtenons, en posant $x = l$, l'effort tranchant :

$$Q_l = -\frac{a}{l}\left(P_1 - \frac{1}{2}P\frac{a}{l}\right)\frac{\alpha l}{\operatorname{sh}\alpha l\left(1-\frac{a}{l}\right)}.$$

Cette expression permet d'élucider le rôle des déplacements de cisaillement comme moyen de propagation des déformations le long d'une poutre droite. Avec l'augmentation de la rigidité en cisaillement la force Q_l diminue rapidement.

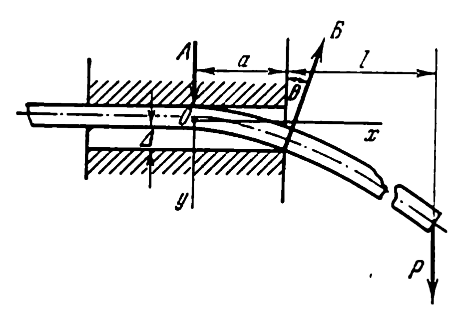


Fig. 265

60. Examinons d'abord les conditions de contact entre la poutre et l'assise rigide dans le cas où il y a un petit interstice (fig. 265).

Soit Δ la valeur de cet interstice. Dans sa partie gauche, la poutre restera droite et collera compactement sur la surface supérieure du trou. Dans le point où la poutre se détache de cette surface apparaît une réaction $A = Pl/a$. La valeur du bras de levier a reste jusqu'ici indéterminée.

A l'endroit où la poutre sort du trou apparaît une réaction B dirigée, s'il n'y a pas de forces de frottement, selon la normale à la surface de la poutre. Comme l'angle de déviation de cette force par rapport à la verticale est petit, on aura

$$B = P + A = P\left(1+\frac{l}{a}\right).$$

Prenons le point O pour le point zéro des déplacements. Pour $x = a$, le déplacement vertical de la poutre Δ est égal à :

$$\Delta = \frac{Aa^3}{6EJ} = \frac{Pla^2}{6EJ},$$

d'où

$$a = \sqrt{\frac{6EJ\Delta}{Pl}}.$$

Trouvons l'angle de rotation θ :

$$\theta = \frac{Aa^2}{2EJ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Pl}{EJ}6\Delta}.$$

Avec la diminution de l'interstice Δ l'angle θ et la grandeur a tendent vers zéro, tandis que les forces A et B augmentent indéfi-

niment. Il est intéressant de voir comment change avec cela la composante horizontale de la force B:

$$B\theta = P\left(1+\frac{l}{a}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Pl}{EJ}6\Delta},$$

ou

$$B\theta = \frac{P}{2}\left(\frac{Pl^2}{EJ}+\sqrt{\frac{Pl}{EJ}6\Delta}\right).$$

Comme on voit, lorsque $\Delta \to 0$, la composante horizontale de la force B tend vers une limite définie

$$B\theta = \frac{P^2l^2}{2EJ}.$$

C'est cette valeur de la force que montrera le dynamomètre.

61. Lorsqu'un cylindre est revêtu d'un anneau, ce dernier ne va pas coller sur le cylindre sur tout le pourtour. Sur les tranches AB, l'anneau ne touchera pas le cylindre et ce n'est que sur la tranche BB (fig. 266) qu'il y aura un contact serré.

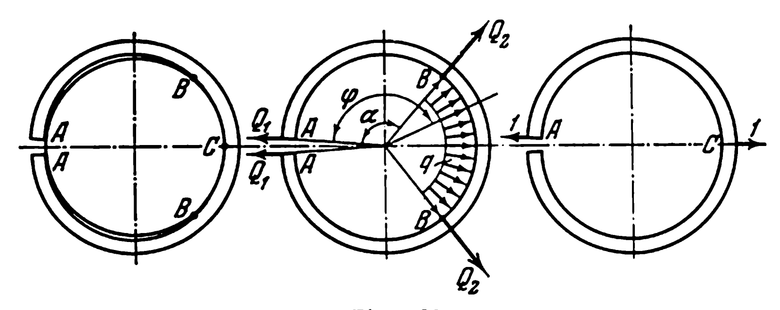


Fig. 266

Du côté du cylindre, des efforts Q_1 agissent sur les extrémités A. Dans les points B agissent des efforts Q_2. La nature de ces efforts est exactement la même que dans le problème 59.

Dans la zone de contact serré, on peut se représenter une charge uniformément répartie d'intensité q. Si, en sélectionnant les forces Q_1, Q_2, q et l'angle α on parvient à satisfaire à toutes les conditions de déformation de l'anneau, on aura par là même démontré la justesse du schéma qu'on a adopté pour les efforts.

Comme, par hypothèse, la tranche BB colle compactement sur le cylindre, la courbure de l'anneau y sera évidemment égale à une valeur constante $2/D$. La variation de la courbure

$$\frac{2}{D-\Delta}-\frac{2}{D}\approx\frac{2\Delta}{D^2}$$

sera aussi une valeur constante. Le moment fléchissant sur cette même tranche BB sera

$$M_{BB} = EJ\,\frac{2\Delta}{D^2},$$

EJ étant la rigidité en flexion de l'anneau. Par conséquent, les forces Q_1, Q_2 et q doivent être choisies de façon à assurer que sur la tranche BB le moment soit constant et ait une valeur donnée.

Dans une section arbitraire de l'anneau sur la tranche BB, on aura (fig. 266):

$$M_{BB} = Q_1 \frac{D}{2} \sin \varphi + Q_2 \frac{D}{2} \sin (\varphi - \alpha) + \frac{1}{2} q \frac{D^2}{4} \sin^2 (\varphi - \alpha) + + \frac{1}{2} q \frac{D^2}{4} [1 - \cos (\varphi - \alpha)]^2,$$

ou alors

$$M_{BB} = \sin \varphi \cdot \left[Q_1 \frac{D}{2} + Q_2 \frac{D}{2} \cos \alpha - q \frac{D^2}{4} \sin \alpha \right] - - \cos \varphi \cdot \left[Q_2 \frac{D}{2} \sin \alpha + q \frac{D^2}{4} \cos \alpha \right] + q \frac{D^2}{4}.$$

Le moment reste constant si l'on exige que s'annule chacune des expressions comprises entre crochets:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 + Q_2 \cos \alpha - q \frac{D}{2} \sin \alpha = 0, \\ Q_2 \sin \alpha + q \frac{D}{2} \cos \alpha = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

nous obtenons alors

$$q = EJ \frac{8\Delta}{D^4}.$$

Ainsi, on a trouvé q. Les deux équations (1) ne sont pas suffisantes pour déterminer Q_1, Q_2 et α.

Exigeons maintenant que la distance entre les points de l'anneau A et C augmente de Δ. Cette condition, nous l'écrirons dans la forme suivante

$$\Delta = \int_0^{\alpha} \frac{M_{AB} M_1 D \, d\varphi}{2EJ} + \int_{\alpha}^{\pi} \frac{M_{BB} M_1 D \, d\varphi}{2EJ},$$

M_{AB} et M_{BB} étant les moments fléchissants sur les tranches AB et BB, tandis que M_1, le moment fléchissant créé par des forces unitaires appliquées d'après la direction AC; leurs valeurs respectives sont

$$M_{AB} = Q_1 \frac{D}{2} \sin \varphi, \quad M_{BB} = EJ \frac{2\Delta}{D^2}, \quad M_1 = \frac{D}{2} \sin \varphi.$$

Après substitution et intégration nous obtenons:

$$\Delta = Q_1 \frac{D^3}{16EJ} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) + \frac{\Delta}{2} (1 + \cos \alpha).$$

Résolvons cette équation avec l'équation (1) et déterminons Q_1 et Q_2:

$$Q_1 = \frac{4EJ\Delta}{D^3 \sin \alpha}, \quad Q_2 = -\frac{4EJ\Delta}{D^3} \operatorname{cotg} \alpha.$$

La valeur de α s'obtient de l'équation transcendante suivante:

$$2=\frac{\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha$$

qui donne $\alpha=122°35'$. Nous aurons alors,

$$Q_1=4{,}75\frac{EJ\Delta}{D^3},\quad Q_2=-2{,}56\frac{EJ\Delta}{D^3}.$$

Ayant, de cette façon-là, satisfait à toutes les conditions géométriques, nous avons ainsi confirmé la justesse du schéma adopté pour représenter les forces.

Sur la fig. 267 on a montré l'épure du moment fléchissant.

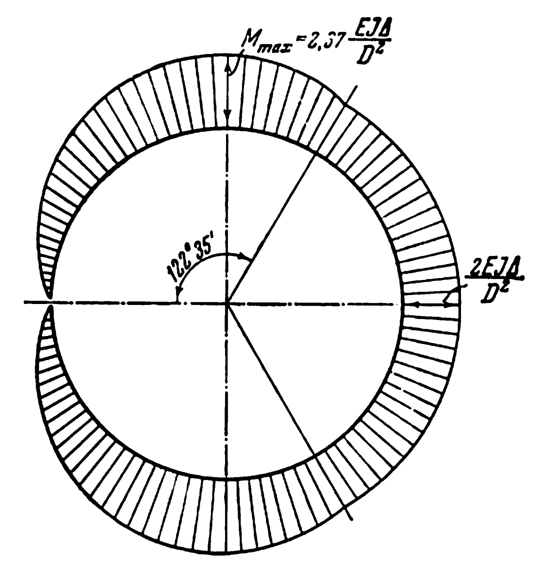


Fig. 267

62. Lors de la résolution du problème de déformation d'un ressort flexible (fig. 60), il est indispensable de tenir compte de l'influence du cisaillement sur la forme de la déformée du ressort.

Si nous partons de la dépendance ordinaire entre le moment fléchissant et la variation de la courbure:

$$\frac{1}{R}=\frac{M}{EJ},$$

nous aboutissons inévitablement à cette conclusion-ci que les points A ne toucheront la surface que pour $P=\infty$. Effectivement, le moment fléchissant sur les extrémités du ressort est nul pour toute valeur finie des forces P; or pour le redressement total du ressort, il faut que dans tous ses points, le moment soit égal à $M=EJ/R$.

Dans des conditions réelles, la force cherchée a, naturellement, une valeur finie.

Cette contradiction à laquelle on a abouti s'explique par le fait que lorsque le ressort est soumis à la flexion par des forces P appliquées sur ses extrémités, où le moment fléchissant est faible, la variation de la courbure se fait, essentiellement, grâce aux déformations de cisaillement dont il faut nécessairement tenir compte lors de la résolution du problème.

Recourons à l'expression (1) (p. 143). La variation de la courbure d'un ressort comprimé sur une surface rigide est égale à $y'' = -1/R$. Dans ce cas, nous aurons

$$M'' - \alpha^2 M = \frac{1}{R}\frac{GF}{k}, \quad \alpha^2 = \frac{GF}{EJk}.$$

Résolvant cette équation, trouvons

$$M = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x - \frac{EJ}{R}.$$

Les constantes, nous les déterminerons des conditions suivantes:

$$\text{pour} \quad x = 0 \quad Q = M' = 0,$$
$$\text{pour} \quad x = l \quad M = 0,$$

de là

$$A = 0, \quad B = \frac{EJ}{R}\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha l}, \quad M = \frac{EJ}{R}\left(\frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha 1} - 1\right).$$

La force cherchée sera

$$P = Q_{x=l} = M'_{x=l} = \frac{EJ}{R}\alpha \operatorname{th} \alpha l.$$

Pour $GF = \infty$ (absence de cisaillements), α tend aussi vers l'infini. Dans ce cas, $\operatorname{th} \alpha l = 1$ et, comme il fallait s'y attendre,

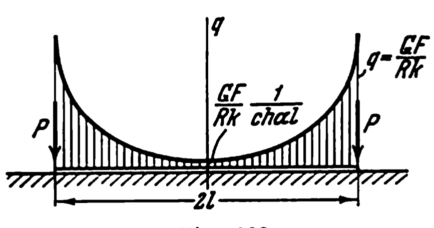


Fig. 268

$P = \infty$. La pression de contact sur l'aire de contact entre le ressort et la surface rigide se détermine comme suit:

$$q = M'' = \frac{EJ}{R}\alpha^2 \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l} = \frac{GF}{Rk}\frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l}.$$

Sur la fig. 268 est représentée, sous forme de courbe, la loi de répartition de q le long du ressort.

63. Considérons une quelconque des poutres composantes (fig. 61 et 269).

Comme la force P n'est pas appliquée au centre de rigidité, la poutre représentée sur la fig. 269 sera simultanément soumise à la flexion et à la torsion. Appliquant dans les sections de découpage des premières plaques des efforts N de façon à assurer l'égalité du moment

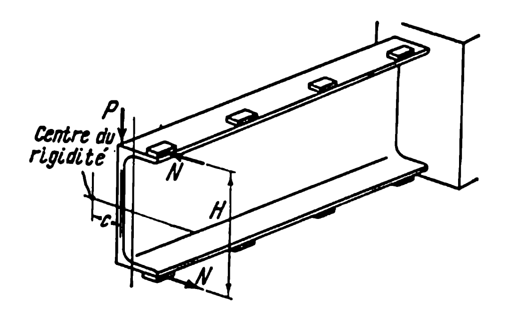


Fig. 269

créé par les deux forces et du moment Pc, nous éliminons cette torsion pour toutes les sections de la poutre. On aura alors $N = Pc/H$.

Ainsi, la première plaque d'en haut est comprimée tandis que la première plaque d'en bas est soumise à la traction par les forces N. Les autres plaques ne sont soumises à aucuns efforts lorsque les poutres travaillent en flexion. Cette conclusion, naturellement, est juste dans la mesure où il est permis de considérer les plaques comme rigides. Si elles se déformaient de façon sensible, l'on pourrait déterminer les efforts suscités en elles au moyen de la même méthode que celle employée dans le problème 14 pour déterminer les efforts dans les rivets.

64. Décomposons la force P d'après les axes principaux x et y (fig. 270) et découpons une section dans le point anguleux A. Introduisons en même temps un flux indéterminé de contraintes tangentielles τ_0. Dans un point arbitraire B, la contrainte tangentielle sera

$$\tau = \frac{P\sqrt{2}}{2\delta}\left(\frac{S_x^*}{J_x} + \frac{S_y^*}{J_y}\right) + \tau_0.$$

Après des calculs simples, nous trouvons

$$b = a\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2+\sqrt{2}}, \quad J_x = \frac{a^3\delta}{6}(2+\sqrt{2}),$$

$$J_y = \frac{a^3\delta}{6}\,\frac{1+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

Pour chacune des trois tranches de la section, nous obtenons

$$\tau_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\frac{P}{a^3\delta}\left[\frac{s_1 a\sqrt{2}-s_1^2}{2+\sqrt{2}}+\frac{a\sqrt{2}\,s_1}{1+2\sqrt{2}}\right]+\tau_0,$$

$$\tau_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\frac{P}{a^3\delta}\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}s_2^2-a\sqrt{2}\,s_2}{2+\sqrt{2}}+\frac{2a^2+a\sqrt{2}\,s_2-(1+\sqrt{2})\,s_2^2}{1+2\sqrt{2}}\right]+\tau_0, \qquad (1)$$

$$\tau_3=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\frac{P}{a^3\delta}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s_3^2-a^2}{2+\sqrt{2}}+\frac{a^2-a(2+\sqrt{2})\,s_3+(1+\sqrt{2})\,s_3^2}{1+2\sqrt{2}}\right]+\tau_0,$$

ici s_1, s_2 et s_3 sont les coordonnées calculées à partir des points anguleux sur le pourtour.

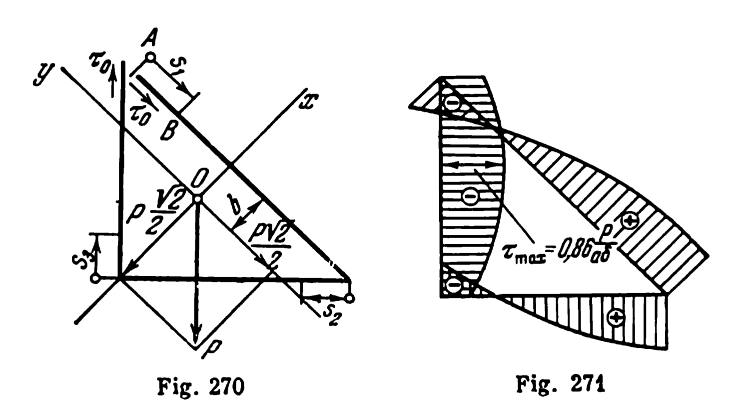


Fig. 270 Fig. 271

Pour que dans la coupure A il n'y ait pas de déplacements réciproques, il faut remplir la condition suivante

$$\int_s \gamma\, ds=0,$$

ou

$$\int_0^{a\sqrt{2}}\tau_1\,ds_1+\int_0^{a}\tau_2\,ds_2+\int_0^{a}\tau_3\,ds_3=0\,;$$

de là on détermine la valeur de τ_0:

$$\tau_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\frac{P}{a\delta}\left(\frac{\sqrt{2}}{3\,(2+\sqrt{2})^2}-\frac{1}{1+2\sqrt{2}}\right).$$

Remplaçant dans les expressions (1) τ_0 par sa valeur et effectuant les calculs nécessaires, nous aurons

$$\tau_1=\frac{P}{a\delta}\,(-0{,}47+1{,}66\zeta_1-0{,}62\zeta_1^2),$$

$$\tau_2=\frac{P}{a\delta}\,(0{,}64-0{,}095\zeta_2-0{,}90\zeta_2^2),$$

$$\tau_3=\frac{P}{a\delta}\,(-0{,}35-1{,}89\zeta_3+1{,}78\zeta_3^2),$$

où

$$\zeta_i = \frac{s_i}{a} \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Sur la fig. 271 on a représenté l'épure des contraintes tangentielles; il apparaît que

$$\tau_{\max} = 0{,}86 \frac{P}{a\delta}.$$

65. Au moyen de deux sections passant à des distances x et $x + dx$ de l'extrémité, prélevons de la poutre un tronçon élémentaire de longueur dx (fig. 272).

Ce tronçon obtenu, divisons-le à son tour en deux parties au moyen d'un plan horizontal passant à une distance y du milieu de la ligne

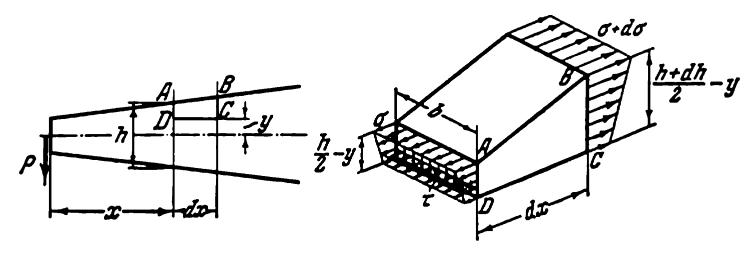


Fig. 272

et examinons la condition d'équilibre de la partie $ABCD$ d'en haut. Il est évident qu'elle se ramène à

$$\int_y^{(h+dh)/2} (\sigma + d\sigma)\, b\, dy - \int_y^{h/2} \sigma b\, dy = \tau b\, dx.$$

Mais comme

$$\sigma = \frac{12My}{bh^3},$$

on aura

$$\sigma + d\sigma = \frac{12y}{b} \left[\frac{M}{h^3} + d\left(\frac{M}{h^3}\right) \right].$$

Après cela la condition d'équilibre prend la forme suivante:

$$\frac{12}{b} \left[\frac{M}{h^3} + d\left(\frac{M}{h^3}\right) \right] \int_y^{(h+dh)/2} y\, dy - \frac{12M}{bh^3} \int_y^{h/2} y\, dy = \tau\, dx,$$

de là

$$\tau = 3 \frac{M}{bh^2} \frac{dh}{dx} + \frac{6}{b} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{h^3} \right).$$

Si h et M varient suivant une fonction linéaire, ayant par hypothèse $h_1 = 2h_0$, nous obtenons

$$h = h_0\left(1+\frac{x}{l}\right), \quad M = Px,$$

$$\tau = \frac{6P}{\left(1+\frac{x}{l}\right)^2 bh_0}\left[\frac{1}{2}\frac{x}{l}+\frac{1}{h_0^2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\frac{1-2\frac{x}{l}}{\left(1+\frac{x}{l}\right)^2}\right].$$

Sur la fig. 273 on a montré les épures de τ pour quelques sections de la poutre. Ici, à la différence d'une poutre d'épaisseur constante, les contraintes tangentielles dans les deux points de la section,

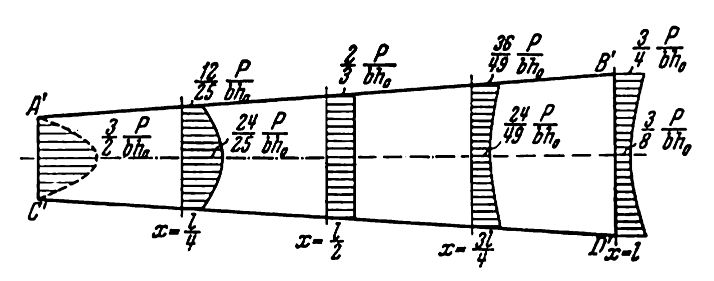


Fig. 273

supérieur et inférieur, ne s'annulent pas puisque le plan sécant n'est pas perpendiculaire aux surfaces limites supérieure $(A'B')$ et inférieure $(C'D')$. Pour la section frontale, l'épure est montrée en pointillé car ici la loi de répartition des contraintes dépend entièrement de la façon dont est appliquée la sollicitation extérieure P.

Si l'épaisseur h de la poutre ne change pas trop vite en fonction de x, c'est-à-dire si l'angle d'élargissement de la poutre est petit, la solution coïncide exactement avec celle obtenue pour un coin au moyen des méthodes de la théorie de l'élasticité.

66. Il est possible de choisir une charge distribuée sous l'action de laquelle la poutre restera droite. Cependant cette charge suscitera des efforts transversaux tellement grands qu'il faudra tenir compte des déformations de cisaillement lors de la détermination de la déformée de la poutre.

L'exemple fort simple suivant atteste la possibilité du choix d'une loi requise pour $q(x)$. Représentons-nous une poutre solidement fixée dans des glissières rigides (fig. 274) et soumise à la flexion par un moment appliqué à l'une de ses extrémités. Pareille poutre restera droite en flexion et l'on peut affirmer que du côté des glissières elle est soumise à l'action des charges du type cherché. Ceci est également prouvé par la solution du problème 59. Dans ce

problème, la partie de droite de la poutre reste droite malgré que la charge distribuée agissant sur elle ne soit pas nulle.

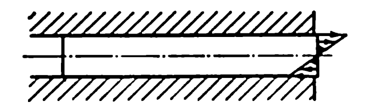


Fig. 274

Prenons l'équation (1) (p. 143)

$$y'' = \frac{M}{EJ} - \frac{kM''}{GF}.$$

Exigeons que $y'' = 0$. Nous obtenons alors

$$M'' - \alpha^2 M = 0,$$

avec $\alpha^2 = GF/kEJ$. Résolvons l'équation différentielle; on aura successivement

$$M = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x, \tag{1}$$

$$Q = C_1 \alpha \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \alpha \operatorname{sh} \alpha x, \tag{2}$$

$$q = Q' = C_1 \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \alpha^2 \operatorname{ch} \alpha x, \tag{3}$$

ici C_1 et C_2 doivent être donnés en fonction du caractère des conditions aux limites. Si la poutre est dotée d'appuis articulés, c'est-à-dire si pour $x = 0$ et $x = l$ $M = 0$, on aura alors $C_1 = C_2 = 0$ et $q = 0$. Cela signifie que la poutre ne reste droite que sous une charge nulle.

Il y a cependant une possibilité d'appliquer non seulement des charges réparties mais aussi des efforts concentrés sur les extrémités de la poutre. Supposons, par exemple, que le moment sur l'appui de gauche est, comme auparavant, nul tandis que sur l'appui de droite, nous nous réservons le droit d'appliquer n'importe quel moment concentré. En posant que pour $x = 0$ $M = 0$, nous aurons alors

$$C_2 = 0, \quad M = C_1 \operatorname{sh} \alpha x,$$

C_1 est une constante quelconque; de plus, d'après l'équation (2),

$$Q = C_1 \alpha \operatorname{ch} \alpha x,$$

et, d'après l'équation (3), la sollicitation cherchée sera

$$q(x) = C_1 \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha x.$$

La réaction sur l'appui de gauche sera

$$Q_{x=0} = C_1 \alpha,$$

tandis que sur l'appui de droite,

$$Q_{x=l} = C_1\alpha \operatorname{ch} \alpha l,$$
$$M_{x=l} = C_1 \operatorname{sh} \alpha l.$$

Le système de charges cherché est représenté sur la fig. 275.

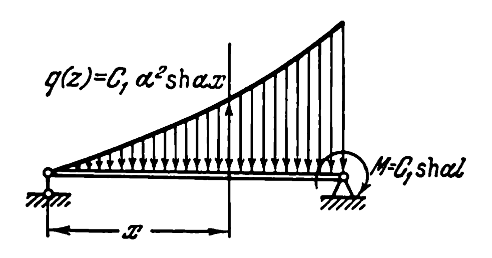


Fig. 275

67. Comme la poutre est très grande, nous pouvons, après l'avoir découpée sur le n-ième appui, considérer sa partie de droite de nouveau comme une poutre très grande semblable à la poutre donnée, mais cette fois-ci sollicitée non par un moment M, mais bien par un moment M_n. On peut étendre ce raisonnement sur les appuis $n+1$, $n+2$, etc. Par conséquent, si le moment fléchissant à l'appui $n+1$ constitue une certaine fraction du moment agissant à l'appui n, le moment à l'appui $n+2$ constituera une fraction identique de celle agissant à l'appui $n+1$, c'est-à-dire,

$$M_{n+1} = xM_n,$$
$$M_{n+2} = xM_{n+1} = x^2M_n,$$

etc.

Ecrivons l'expression du théorème des trois moments pour les travées n et $n+1$. Lorsque les travées ne sont pas sollicitées par une charge extérieure, on a

$$M_na + 2M_{n+1}(a + a) + M_{n+2}a = 0.$$

Ou, en tenant compte des expressions pour M_{n+1} et M_{n+2},

$$1 + 4x + x^2 = 0,$$

de là, nous obtenons

$$x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Comme par sa valeur absolue x doit être plus petit que l'unité, nous prendrons le signe « plus » *). Alors,

$$x = -(2 - \sqrt{3}).$$

*) Le signe moins correspond au cas où le moment extérieur est appliqué non pas sur l'appui extrême gauche, mais sur l'appui extrême droit.

Le moment fléchissant à l'appui n sera

$$M_n = Mx^{n-1} = M(\sqrt{3} - 2)^{n-1}.$$

L'angle de rotation sur l'appui n s'obtient en multipliant l'épure

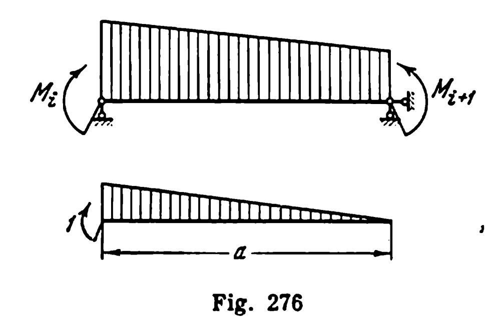


Fig. 276

des moments pour la travée n par l'épure du moment unitaire (fig. 276):

$$EJ\theta_n = \frac{Ma}{6}\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{n-1}.$$

68. Ecrivons un système de $n - 2$ équations nécessaires pour la détermination des moments d'appui:

$$M + 4M_2 + M_3 = 0,$$
$$M_2 + 4M_3 + M_4 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_{n-2} + 4M_{n-1} = 0.$$

Posons $M_i = Ax^{i-1}$. Substituant cette valeur de M_i dans toutes les équations à l'exception de la première et de la dernière, nous obtenons

$$1 + 4x + x^2 = 0,$$
$$x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Il devient maintenant aisé d'établir que toutes les équations à l'exception de la première et de la dernière seront satisfaites si l'on prend

$$M_2 = Ax_1 + Bx_2,$$
$$M_3 = Ax_1^2 + Bx_2^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_i = Ax_1^{i-1} + Bx_2^{i-1},$$

avec

$$x_1 = -2 + \sqrt{3},$$
$$x_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

A et B sont des constantes quelconques que nous choisirons de façon à satisfaire à la première et la dernière équation du système

$$M+4(Ax_1+Bx_2)+Ax_1^2+Bx_2^2=0,$$
$$Ax_1^{n-3}+Bx_2^{n-3}+4Ax_1^{n-2}+4Bx_2^{n-2}=0,$$

de là nous obtenons

$$A=M\frac{x_2^{n-2}}{x_1(x_2^{n-1}-x_1^{n-1})},$$
$$B=-M\frac{x_1^{n-2}}{x_2(x_2^{n-1}-x_1^{n-1})}.$$

En définitive, on aura

$$M_i=M\frac{(-2-\sqrt{3})^{n-i}-(-2+\sqrt{3})^{n-i}}{(-2-\sqrt{3})^{n-1}-(-2+\sqrt{3})^{n-1}}.$$

La détermination de l'angle de rotation à l'appui i pour un moment connu M_i ne présente aucune difficulté. Multipliant entre elles les épures (fig. 276), nous obtenons

$$EJ\theta_i=M_i\frac{a}{3}+M_{i+1}\frac{a}{6}.$$

69. Désignons par X_1 la réaction normale de l'appui de droite. L'effort de frottement sera fX_1 (fig. 277). L'équation de la méthode

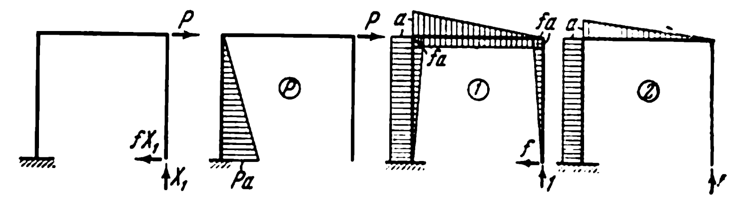


Fig. 277

des forces a la forme suivante

$$\delta_{11}X_1+\delta_{1p}=0.$$

Comme $\delta_{11}X_1$ représente le déplacement provoqué par les forces X_1 et fX_1 dans la direction 1, et δ_{1p} le déplacement provoqué par la charge P dans la même direction, δ_{11} s'obtiendra en multipliant entre elles les épures (*1*) et (*2*) tandis que δ_{1p} en multipliant entre elles les épures (*P*) et (*2*):

$$\delta_{11}=\frac{a^3}{EJ}\left(\frac{4}{3}-f\right),$$
$$\delta_{1p}=-\frac{Pa^3}{2EJ}.$$

La réaction se trouve alors égale à

$$X_1 = \frac{P}{2\left(\frac{4}{3}-f\right)}.$$

Sur la fig. 278 on a montré l'épure du moment fléchissant résultant.

70. On ne peut calculer une poutre à treillis avec des nœuds rigides, en supposant que les barres travaillent en traction et compression, qu'à condition que les forces soient appliquées dans les nœuds. En effet, examinons un certain portique fait d'une suite de contours fermés (fig. 279), tels que si les barres sont dotées de liaisons articulées, le système reste géométriquement invariable.

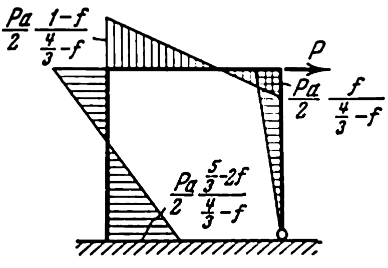


Fig. 278

Supposons que le portique est sollicité par des charges appliquées uniquement dans les nœuds (la charge P et les réactions d'appui). Au moyen de la méthode des forces, levons l'hyperstaticité du portique en pratiquant des charnières dans ses nœuds et en introduisant, en qualité de liaisons élastiques, les moments X_1, X_2, X_3, . . .

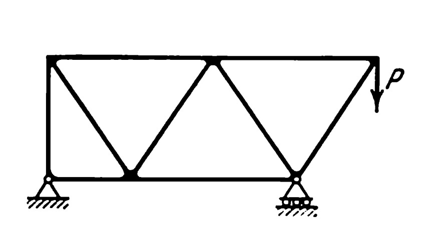


Fig. 279

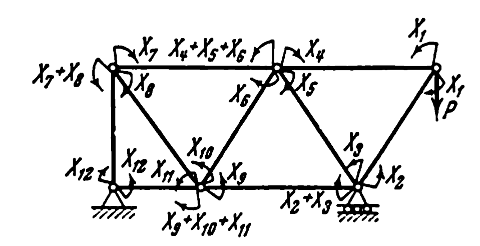


Fig. 280

appliqués dans les nœuds (fig. 280). Ainsi, pour le système donné, nous aurons 12 équations de type ordinaire:

$$\left.\begin{array}{r} \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\ldots+\delta_{1p}=0, \\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\ldots+\delta_{2p}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{121}X_1+\delta_{122}X_2+\ldots+\delta_{12p}=0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ici, les coefficients δ_{11}, δ_{12}, . . . s'obtiennent en multipliant entre elles les épures des moments fléchissants créés par les moments unitaires qui remplacent les moments X_1, X_2, . . . Les coefficients δ_{1p}, δ_{2p}, . . . s'obtiennent en multipliant ces mêmes épures par

l'épure des moments fléchissants dus à l'action de la charge P. Or, la charge P, comme d'ailleurs toutes les forces appliquées dans les nœuds d'une poutre à treillis, lorsque les barres sont dotées de liaisons articulées, ne donne pas de moments fléchissants. Par conséquent,

$$\delta_{1p} = \delta_{2p} = \ldots = 0; \quad (2)$$

comme les équations (1) sont indépendantes, le déterminant du système n'est pas égal à zéro (voir le problème suivant); dans ce cas, si les conditions (2) sont observées, on aura, évidemment,

$$X_1 = X_2 = \ldots = 0.$$

Par conséquent, avec les conditions imposées, un système avec des nœuds rigides est équivalent à un système avec des liaisons articulées des barres.

Strictement parlant, dans le système représenté sur la fig. 279, il y aura malgré tout des moments fléchissants conditionnés par l'allongement et le rétrécissement des barres. On aurait pu obtenir ces moments fléchissants à partir des mêmes équations (1); pour cela, il aurait été suffisant de tenir compte, lors du calcul des coefficients δ_{11}, δ_{12}, . . ., δ_{1p}, δ_{2p}, . . ., des déplacements provoqués par la traction et la compression des barres. Il est cependant évident que les contraintes correspondant à ces moments seront beaucoup plus petites que les contraintes liées aux efforts normaux. En effet, dans n'importe quelle poutre articulée soumise à la flexion par un moment M, les déplacements ont une valeur de l'ordre

$$\frac{Ml^2}{EJ},$$

tandis qu'en traction, ils sont de l'ordre de Pl/EF.

Dans le cas présent, ces deux valeurs sont d'un même ordre, c'est-à-dire

$$\frac{Ml^2}{EJ} \sim \frac{Pl}{EF}.$$

Or,

$$M = \sigma_{fl} W, \quad P = \sigma_{tr} F,$$

c'est pourquoi, nous avons

$$\sigma_{fl} \sim \sigma_{tr} \frac{J}{Wl},$$

c'est-à-dire, σ_{fl} a une valeur de l'ordre $\sigma_{tr} \frac{J}{Wl}$. Or, J/W est égale à la distance du point de la section le plus éloigné de l'axe neutre passant par le centre de gravité; par conséquent, J/Wl est une grandeur très petite (le rapport d'une partie de la dimension de la section de la barre à sa longueur).

Conformément à cela, σ_{fl} sera d'un même ordre de grandeur par comparaison avec σ_{tr}.

71. Le déterminant ne peut pas être nul. S'il s'annule, cela témoigne du fait que le système des équations n'est pas correct.

Chacune des équations du système canonique représente la condition d'égalité des déplacements provoqués par une charge extérieure à la somme des déplacements créés par des forces internes inconnues :

$$\delta_{1p} = -\delta_{11}X_1 - \delta_{12}X_2 - \delta_{13}X_3 - \dots,$$
$$\delta_{2p} = -\delta_{21}X_1 - \delta_{22}X_2 - \delta_{23}X_3 - \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\delta_{np} = -\delta_{n1}X_1 - \delta_{n2}X_2 - \delta_{n3}X_3 - \dots$$

Lors de l'établissement des équations, l'on considère uniquement les déplacements indépendants. Aucun déplacement ne peut être exprimé au moyen des autres. Par conséquent, aucune équation ne peut être une combinaison des autres équations. Ainsi, toutes les équations sont indépendantes et, en particulier, linéairement indépendantes. Or, comme on sait, le déterminant d'un système d'équations linéairement indépendantes ne peut pas être nul. Si le système n'est pas correct, c'est-à-dire si ce sont des déplacements dépendants qui ont été considérés (par exemple, les déplacements d'après les axes *1*, *2*, *3* dans le portique plan représenté sur la fig. 281), le déterminant sera nul :

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

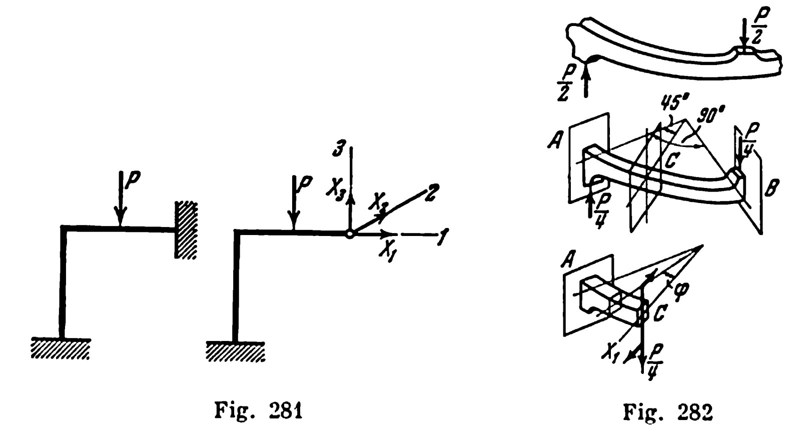


Fig. 281 Fig. 282

72. Examinons un quart de l'anneau du ressort (fig. 282). La section A ne se retourne pas par rapport à B, mais se déplace dans une direction axiale.

Dans la section C apparaissent un effort tranchant $P/4$ et un moment de torsion X_1 (fig. 282).

En nous guidant de la méthode générale employée pour lever l'hyperstaticité des portiques, déterminons cette grandeur

$$\delta_{11}X_1+\delta_{1p}=0,$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/4} M_{1fl}^2R\,d\varphi+\frac{1}{C}\int_0^{\pi/4} M_{1t}^2R\,d\varphi,$$

$$\delta_{1p}=\frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/4} M_{1fl}M_{pfl}R\,d\varphi+\frac{1}{C}\int_0^{\pi/4} M_{1t}M_{pt}\cdot R\,d\varphi,$$

avec

$$M_{1fl}=\sin\varphi,\qquad M_{1t}=\cos\varphi,$$

$$M_{pfl}=-\frac{PR}{4}\sin\varphi,\quad M_{pt}=\frac{PR}{4}(1-\cos\varphi),$$

C est la rigidité en torsion. Pour une section carrée,

$$C=0{,}141\;Ga^4.$$

En intégrant, nous obtenons

$$\delta_{11}=\frac{R}{4EJ}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{R}{4C}\left(\frac{\pi}{2}+1\right),$$

$$\delta_{1p}=-\frac{PR^2}{16EJ}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{PR^2}{16C}\left(2\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}-1\right),$$

$$X_1=\frac{PR}{4}\,\frac{\frac{\pi}{2}-1-\frac{EJ}{C}\left(2\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}-1\right)}{\frac{\pi}{2}-1+\frac{EJ}{C}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}.$$

Pour une section carrée, si $\mu=0{,}3$, nous avons

$$\frac{EJ}{C}=\frac{E\,\frac{a^4}{12}}{0{,}141\,\frac{E}{2(1+\mu)}\,a^4}=\frac{1+\mu}{0{,}846}\approx 1{,}54;$$

le moment de torsion sera alors égal à

$$X_1=0{,}0375\,\frac{PR}{4}.$$

Le moment fléchissant résultant

$$M_{fl}=-\frac{PR}{4}0{,}962\sin\varphi.$$

Le moment de torsion résultant

$$M_t=\frac{PR}{4}(1-0{,}962\cos\varphi).$$

Le déplacement vertical de la section C par rapport à A sera

$$\lambda_C = \frac{R}{EJ}\int_0^{\pi/4} M_{\text{fl}} M'_{\text{fl}}\, d\varphi + \frac{R}{C}\int_0^{\pi/4} M_{\text{t}} M'_{\text{t}}\, d\varphi,$$

ici M_{fl} et M_{t}, moments fléchissant et de torsion résultants tandis que M'_{fl} et M'_{t}, les mêmes moments dus à une force unitaire verticale appliquée dans la section C, c'est-à-dire

$$M'_{\text{fl}} = -R\sin\varphi, \quad M'_{\text{t}} = R(1-\cos\varphi).$$

Ainsi, nous trouvons

$$\lambda_C = \frac{PR^3}{4EJ}\, 0{,}962 \int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi +$$

$$+ \frac{PR^3}{4C}\int_0^{\pi/4} (1-0{,}962\cos\varphi)(1-\cos\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{PR^3}{16EJ}\, 0{,}962 \left(\frac{\pi}{2}-1\right) +$$

$$+ \frac{PR^3}{16C}\left[\pi - 2\sqrt{2} - 0{,}962\cdot 2\sqrt{2} + 0{,}962\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\right];$$

ou, en définitive,

$$\lambda_C = \frac{PR^3}{EJ}\, 0{,}0405.$$

Pour obtenir l'aplatissement total du ressort, il faut multiplier la valeur de λ_C par le double du nombre d'anneaux de travail $2n$:

$$\lambda = 2n\frac{PR^3}{EJ}\, 0{,}0405 \quad \text{ou} \quad \lambda = 0{,}972\frac{PR^3}{Ea^4}n.$$

Comparant cette valeur avec celle de l'aplatissement d'un ressort à boudin de section carrée ayant un même nombre d'anneaux de travail n, c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{PR^3 2\pi n}{G\cdot 0{,}141a^4} \approx 116\frac{PR^3 n}{Ea^4},$$

nous arrivons à la conclusion qu'un ressort sectionné est à peu près 120 fois plus rigide qu'un ressort à boudin.

73. Etudions un certain portique plan avec un contour fermé et ayant une rigidité constante EJ; supposons que l'on a déjà tracé son épure des moments fléchissants (fig. 283). Sectionnons le contour de ce portique en un point quelconque et déterminons l'angle de rotation réciproque des sections en l'endroit sectionné. De la condition de continuité, cet angle est égal à zéro. Pour déterminer l'angle de rotation réciproque, calculons l'intégrale

$$\int_s \frac{MM_1\, ds}{EJ},$$

M_1 étant le moment fléchissant créé par des moments unitaires appliqués en l'endroit sectionné (fig. 283), c'est-à-dire $M_1 = 1$.

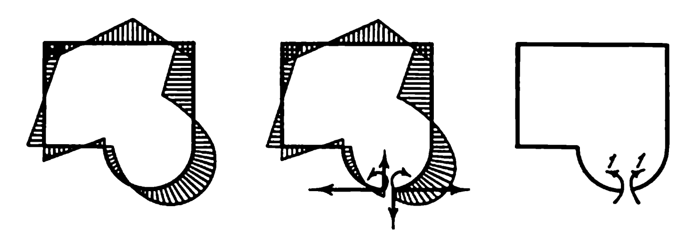


Fig. 283

C'est pourquoi, pour EJ = const, nous obtenons

$$\int_s M\,ds = 0.$$

La démonstration qui vient d'être faite est valable non seulement pour des portiques aux contours fermés, mais aussi, d'une manière générale, pour tous les systèmes en portiques pour lesquels les conditions de fixation ne permettent pas la rotation d'une section d'encastrement par rapport à l'autre. Par exemple, dans chacun des

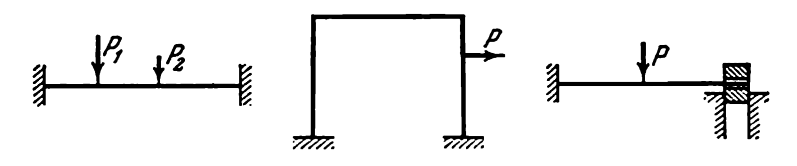


Fig. 284

systèmes représentés sur la fig. 284, l'aire de l'épure des moments, sous n'importe quelle charge, est nulle si EJ = const.

74. Sectionnons le portique suivant l'articulation et déterminons le déplacement des sections les unes par rapport aux autres en l'endroit sectionné. Pour cela, appliquons sur le portique, dans l'articulation, deux forces unitaires dirigées dans des sens opposés (fig. 285). La ligne d'action des forces peut être choisie arbitrairement.

Le déplacement cherché δ sera égal à

$$\delta = \int_s \frac{MM_1}{EJ}\,ds.$$

Or, $M_1 = x$ et, comme $\delta = 0$, on aura $\int_s Mx\,ds = 0$.

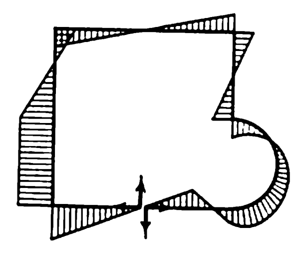
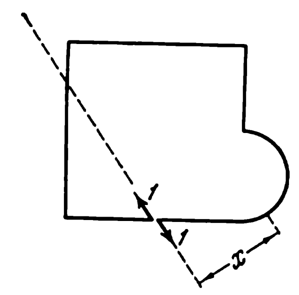



Fig. 285

75. Remarquons au préalable que l'aire ΔF formée par une poutre quelconque en flexion est donnée par l'intégrale suivante:

$$\Delta F = \int_s \frac{MM_{1q}}{EJ}\,ds,$$

où M est le moment fléchissant créé par les charges extérieures, M_{1q}, le moment fléchissant créé par une charge distribuée d'intensité « unité » ($q = 1$ kgf/cm).

Cette expression s'établit le plus simplement par la même méthode que les expressions habituelles pour les déplacements linéaires et angulaires.

Pour déterminer la variation de l'aire délimitée par le contour fermé du portique, il faut au préalable trouver l'expression pour M_{1q} en appliquant sur le portique une charge unitaire distribuée $q = 1$ (fig. 286).

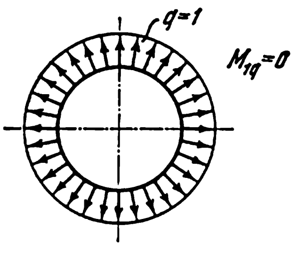


Fig. 286

Or, pour un portique fermé en forme d'anneau, $M_{1q} = 0$; par conséquent, $\Delta F = 0$. Par là même l'hypothèse est démontrée. Il est tout à fait évident que cette démonstration est juste, d'une part, dans la mesure uniquement où il est permis de négliger la traction du contour de l'anneau et, d'autre part, à condition que le système travaille dans le domaine des petits déplacements. Pour un anneau très flexible et sous une forte altération de sa forme, l'aire délimitée par le contour ne reste pas invariable.

76. Désignons par y le déplacement vertical de la poutre sollicitée par une charge P. Ecrivons l'équation différentielle de la déformée d'une poutre

$$EJy'' = M_{f1}$$

dans la forme suivante:

$$EJy^{(IV)} = M''_{f1} = q,$$

où q kgf/cm est l'intensité de la charge : force par unité de longueur de la poutre. Pour le cas étudié, cette force est, évidemment, égale au poids de l'eau déplacée par l'unité de longueur de la poutre sur le déplacement y, c'est-à-dire

$$q = -1 \cdot by\,\gamma,$$

γ étant le poids spécifique de l'eau. Devant $by\gamma$ on a mis le signe moins puisque l'intensité q est dirigée dans le sens opposé au déplacement y. On aura maintenant

$$y^{(IV)} + \frac{b\gamma}{EJ}\,y = 0.$$

Introduisons la notation suivante :

$$\frac{b\gamma}{EJ} = 4k^4, \tag{1}$$

k étant une constante. L'équation prend la forme suivante :

$$y^{(IV)} + 4k^4 y = 0. \tag{2}$$

Cette équation s'appelle équation d'une poutre reposant sur une base élastique. Une poutre flottante de section rectangulaire en est un exemple typique. Pour cette poutre, la réaction de l'assise (l'eau) est en chaque point proportionnelle au déplacement y.

L'équation (2) est satisfaite par les fonctions $\operatorname{sh} kx \sin kx$, $\operatorname{ch} kx \cos kx$, $\operatorname{sh} kx \cos kx$, $\operatorname{ch} kx \sin kx$ et par n'importe quelle combinaison linéaire de ces dernières. Quand on utilise ces fonctions, le plus commode est de se servir des combinaisons proposées par A. Krylov et qui s'appellent « fonctions de Krylov ». Leur avantage réside en ceci que la dérivée de chacune de ces fonctions donne l'une ou l'autre de ces mêmes fonctions. Donnons la table des fonctions de Krylov.

n	$Y_n\,(kx)$	$Y'_n\,(kx)$	$Y''_n\,(kx)$	$Y'''_n\,(kx)$	$Y^{IV}_n\,(kx)$
1	$\operatorname{ch} kx \cos kx$	$-4kY_4$	$-4k^2Y_3$	$-4k^3Y_2$	$-4k^4Y_1$
2	$\frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx \sin kx + \operatorname{sh} kx \cos kx)$	kY_1	$-4k^2Y_4$	$-4k^3Y_3$	$-4k^4Y_2$
3	$\frac{1}{2}\operatorname{sh} kx \sin kx$	kY_2	k^2Y_1	$-4k^3Y_4$	$-4k^4Y_3$
4	$\frac{1}{4}(\operatorname{ch} kx \sin kx - \operatorname{sh} kx \cos kx)$	kY_3	k^2Y_2	k^3Y_1	$-4k^4Y_4$

On peut écrire l'expression pour y dans la forme suivante :

$$y = y_0 Y_1(kx) + y'_0 \frac{1}{k}\,Y_2(kx) + \frac{M_0}{EJ}\frac{1}{k^2}\,Y_3(kx) + \frac{Q_0}{EJ}\frac{1}{k^3}\,Y_4(kx),$$

où y_0, y'_0, M_0 et Q_0 sont respectivement déplacement, angle de rotation, moment fléchissant et effort tranchant pour $x = 0$. Si l'on

prend pour origine de lecture des x l'extrémité gauche de la poutre (fig. 71), il est évident qu'on aura

$$Q_0 = 0, \quad M_0 = 0.$$

Déterminons les valeurs de y_0 et y_0' des conditions suivantes:

$$\text{pour} \quad x = \frac{l}{2} \quad y' = 0, \quad Q = \frac{P}{2}.$$

D'après la table, on aura

$$\frac{1}{k} y' = -4y_0 Y_4(kx) + y_0' \frac{1}{k} Y_1(kx),$$

$$\frac{1}{k^2} y'' = -4y_0 Y_3(kx) - y_0' \frac{4}{k} Y_4(kx),$$

$$\frac{1}{k^3} y''' = -4y_0 Y_2(kx) - y_0' \frac{4}{k} Y_3(kx),$$

et les conditions aux limites s'écriront alors dans la forme suivante:

$$-4y_0 Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0' \frac{1}{k} Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0,$$

$$-4y_0 Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) - y_0' \frac{4}{k} Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) = \frac{P}{2EJk^3},$$

de là, trouvons le déplacement et l'angle de rotation pour $x = 0$:

$$y_0 = \frac{P}{8EJk^3} \frac{-Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)},$$

$$\frac{y_0'}{k} = \frac{P}{8EJk^3} \frac{-4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}.$$

Maintenant y et y'' prennent la forme suivante

$$y = -P_0\left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1(kx) + 4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) Y_2(kx)\right],$$

$$y'' = 4P_0 k^2\left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) Y_3(kx) + 4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4(kx)\right],$$

avec

$$P_0 = \frac{P}{8EJk^3} \cdot \frac{1}{Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}.$$

Effectuons des calculs numériques:

$$k^4 = \frac{3\gamma}{Eh^3} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{10^5 \cdot 10^3}, \quad k = 2{,}34 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}^{-1}, \quad \frac{kl}{2} = 1{,}17.$$

Et puis, se servant des tables des fonctions trigonométriques et hyperboliques, conformément aux expressions pour $Y_n(kx)$ (p. 166),

trouvons

$$Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)=0{,}689, \quad Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)=1{,}097,$$

$$Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)=0{,}670, \quad Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)=0{,}265,$$

après quoi, nous obtenons

$$P_0=0{,}0401P,$$

$$y=-0{,}0401P\,[0{,}689Y_1(kx)+1{,}058Y_2(kx)] \text{ cm}, \tag{3}$$

$$M=EJy''=146{,}2P\,[0{,}689Y_3(kx)+1{,}058Y_4(kx)] \text{ kgfcm}. \tag{4}$$

La solution obtenue n'est juste que dans le cas où sur toute sa longueur la poutre va ressortir par sa surface supérieure de la surface de l'eau. C'est seulement dans ce cas qu'on peut considérer la réaction de l'eau proportionnelle au déplacement vertical. Ainsi, la possibilité d'utiliser la solution obtenue se détermine par le déplacement maximum y_{max}.

En l'absence d'une sollicitation, la poutre s'enfoncera dans l'eau d'une valeur égale à 0,6 h (en effet, son poids spécifique constitue 0,6

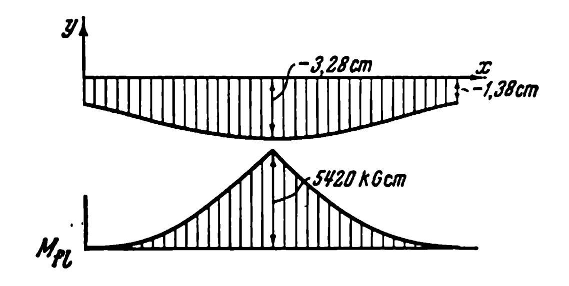


Fig. 287

du poids spécifique de l'eau). La surface supérieure de la poutre s'élèvera au-dessus du niveau de l'eau de $0{,}4\,h = 4$ cm. Par conséquent, la condition pour que la solution obtenue puisse être utilisée s'exprime $|y_{max}| \leqslant 4$ cm.

D'après la formule (3), trouvons: $|y_{max}| = 3{,}28 \text{ cm} < 4$ cm.

Sur la fig. 287, on a représenté l'allure de la déformée d'une poutre incurvée ainsi que l'épure des moments tracée à partir de l'expression (4).

Le moment fléchissant maximal engendré dans la section du milieu est égal à 5420 kgfcm tandis que la contrainte est égale à

$$\sigma_{max}=\frac{M}{W}\approx 16{,}3 \text{ kgf/cm}^2.$$

Le problème sur la flexion d'une plaque flottante se résout de façon analogue (mais, naturellement, il est beaucoup plus compliqué). Nous passerons outre ici la solution de ce problème. Cependant,

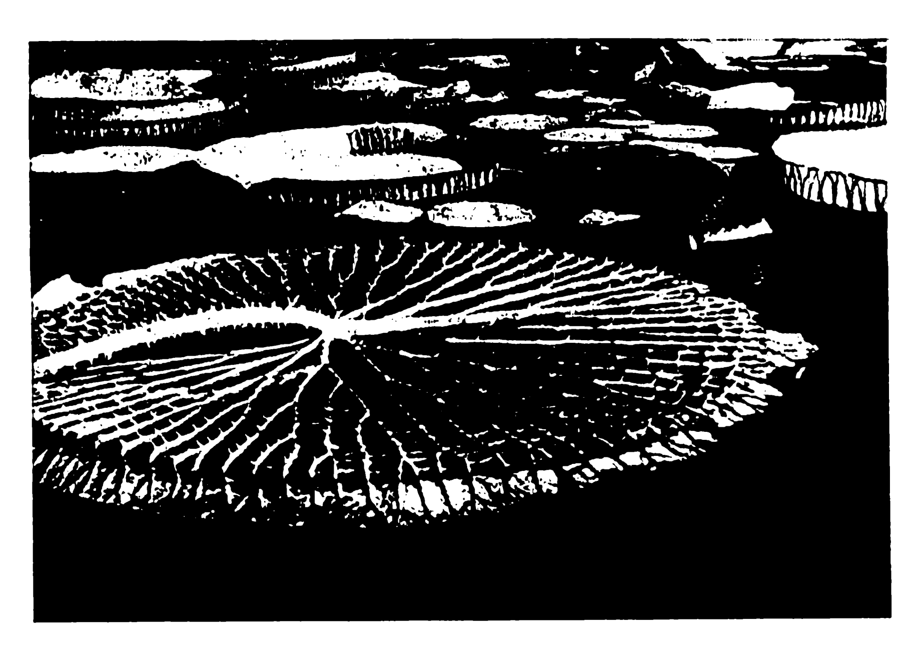


Fig. 288

on voudrait porter l'attention du lecteur sur une curieuse structure que la nature crée pour assurer la résistance d'une grande feuille flottante.

La fig. 288 représente la photo d'une feuille renversée du *Victoria regia*. N'auraient été ici les renforcements radiaux et circulaires que cette feuille immense (plus d'un mètre de diamètre) se briserait infailliblement à la première grande houle même.

77. Réduisons la sollicitation extérieure en efforts appliqués sur les extrémités sous forme d'efforts tranchants et de moments (fig. 289).

Marquons les efforts internes ainsi que les moments se rapportant à la plaque d'en haut par l'index « un », tandis que la plaque d'en bas par l'index « deux ». Pour une partie du joint de longueur x (fig. 290), les conditions d'équilibre donnent:

$$\begin{aligned} N_1 &= -N_2 = N, \\ Q_1 + Q_2 &= Q, \\ M_1 + M_2 &= M + Qx + Nh. \end{aligned} \tag{1}$$

Entre la surface inférieure de la plaque d'en haut et la surface supérieure de celle d'en bas, apparaît un déplacement réciproque Δ le long de l'axe x. Il peut être déterminé comme l'intégrale de la différence entre les déformations

$$\Delta = \int (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, dx + C.$$

Or,

$$\varepsilon_1 = \frac{N}{Ebh} + \frac{6M_1}{Ebh^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{N}{Ebh} - \frac{6M_2}{Ebh^2},$$

c'est pourquoi

$$\Delta = \frac{1}{Ebh} \int \left[2N + \frac{6}{h}(M_1 + M_2)\right] dx + C. \tag{2}$$

La valeur de Δ est liée aux contraintes tangentielles τ_c dans la

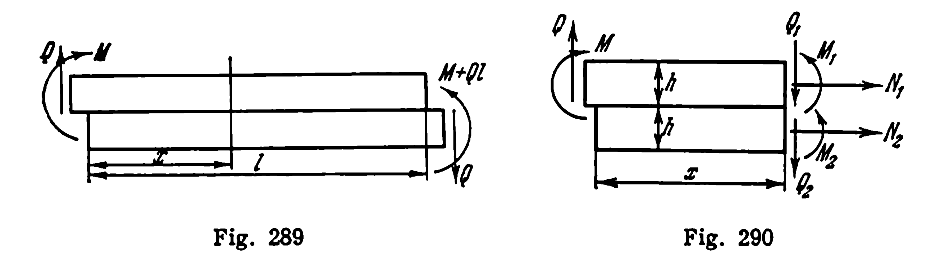


Fig. 289 Fig. 290

couche de la colle par la relation évidente suivante

$$G_c \frac{\Delta}{\delta} = \tau_c,$$

δ étant l'épaisseur de la couche de la colle.

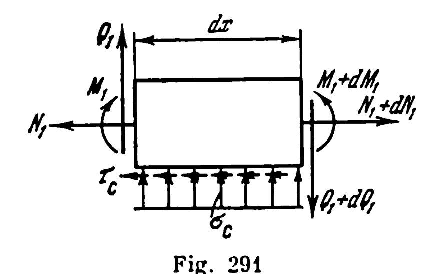


Fig. 291

De la condition d'équilibre d'un élément de longueur dx (fig. 291) découle que

$$b\tau_c = N', \tag{3}$$

c'est pourquoi

$$G_c \frac{\Delta}{\delta} = \frac{N'}{b}.$$

Dérivant par rapport à x les deux parties de cette égalité et excluant dans l'expression (2) le terme $M_1 + M_2$ au moyen de l'expression (1), nous obtenons pour la détermination de N l'équation suivante:

$$N'' - \frac{8G_c}{Eh\delta} N = \frac{6G_c}{Eh^2\delta}(M + Qx).$$

Introduisons la notation suivante:

$$\frac{8G_c}{Eh\delta}=\alpha^2, \tag{4}$$

nous obtiendrons alors

$$N=A\operatorname{sh}\alpha x+B\operatorname{ch}\alpha x-\frac{3}{4h}(M+Qx).$$

Les constantes A et B se déterminent des conditions d'égalité à zéro de la force normale N aux extrémités de la tranche de collage

$$N_{x=0}=N_{x=l}=0.$$

En définitive,

$$N=\frac{3\operatorname{sh}\alpha x}{4h\operatorname{sh}\alpha l}[M(1-\operatorname{ch}\alpha l)+Ql]+\frac{3M}{4h}\operatorname{ch}\alpha x-\frac{3}{4h}(M+Qx). \tag{5}$$

tandis que la contrainte tangentielle τ_c dans la couche de la colle sera, conformément à l'expression (3), égale à

$$\tau_c=\frac{3\alpha\operatorname{ch}\alpha x}{4bh\operatorname{sh}\alpha l}[M(1-\operatorname{ch}\alpha l)+Ql]+\frac{3\alpha M}{4bh}\operatorname{sh}\alpha x-\frac{3}{4bh}Q. \tag{6}$$

La couche de la colle est soumise non seulement au cisaillement mais encore à la traction et à la compression dans une direction perpendiculaire au plan du collage.

La contrainte normale dans la couche de la colle est

$$\sigma_c=\frac{y_2-y_1}{\delta}E_c,$$

y_1 et y_2 étant les déplacements verticaux de la plaque d'en haut et de celle d'en bas.

Ajoutons ici encore deux équations d'équilibre obtenues pour l'élément dx (fig. 291):

$$\sigma_c b=Q_1', \tag{7}$$

$$Q_1=M_1'-\frac{h}{2}N'. \tag{8}$$

Excluons des trois équations obtenues σ_c et Q_1:

$$(y_2-y_1)\frac{bE_c}{\delta}=M_1''-\frac{h}{2}N''.$$

Or, comme $EJy_1''=M_1$, et $EJy_2''=M_2$, on aura

$$\frac{M_2-M_1}{EJ}\frac{bE_c}{\delta}=\left(M_1-\frac{h}{2}N\right)^{(IV)}.$$

Et, enfin, à l'aide de l'équation (1), excluons de cette expression le moment M_2. Finalement, nous obtenons l'équation suivante:

$$\left(M_1-\frac{h}{2}N\right)^{(IV)}+\frac{2bE_c}{\delta EJ}\left(M_1-\frac{h}{2}N\right)=\frac{bE_c}{\delta EJ}(M+Qx).$$

En désignant par

$$M_1-\frac{h}{2}N=Y,\quad \frac{2bE_c}{\delta EJ}=4k^4,$$

nous aurons

$$Y^{(IV)}+4k^4Y=2k^4(M+Qx).$$

Pour résoudre cette équation, on peut se servir des fonctions de Krylov (cf. problème 76). Ainsi,

$$Y=C_1Y_1(kx)+C_2Y_2(kx)+C_3Y_3(kx)+C_4Y_4(kx)+\frac{1}{2}(M+Qx), \qquad (9)$$

ici les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 se déterminent des quatre conditions suivantes:

$$Y_{x=0}=M_{1x=0}=M, \quad Q_{1x=0}=Y'_{x=0}=Q,$$
$$M_{1x=l}=0, \qquad Y'_{x=l}=0.$$

En définitive, après transformations et remplacement des fonctions de Krylov par leurs expressions, nous obtenons

$$C_1=\frac{M}{2}, \quad C_2=\frac{Q}{2k},$$

$$C_3=-M\frac{\operatorname{sh}(kl)+\sin(kl)}{\operatorname{sh}(kl)-\sin(kl)}-\frac{Q}{k}\frac{\operatorname{ch}(kl)+\cos(kl)}{\operatorname{sh}(kl)+\sin(kl)}-2Ql\frac{\operatorname{sh}(kl)\sin(kl)}{\operatorname{sh}^2(kl)-\sin^2(kl)},$$

$$C_4=2M\frac{\operatorname{ch}(kl)+\cos(kl)}{\operatorname{sh}(kl)-\sin(kl)}+\frac{Q}{k}\frac{\operatorname{sh}(kl)+\sin(kl)}{\operatorname{sh}(kl)+\sin(kl)}+$$
$$+2Ql\frac{\operatorname{ch}(kl)\sin(kl)+\operatorname{sh}(kl)\cos(kl)}{\operatorname{sh}^2(kl)-\sin^2(kl)}.$$

Maintenant le moment fléchissant M_1 se détermine de l'expression: $M_1=Y+\frac{h}{2}N$, N étant obtenu à l'aide de la formule (5).

D'après les équations (7) et (8), la contrainte normale dans la couche de la colle sera

$$\sigma_c=\frac{1}{b}Y'',$$

$$\sigma_c=\frac{k^2}{b}[-4C_1Y_3(kx)-4C_2Y_4(kx)+C_3Y_1(kx)+C_4Y_2(kx)]. \qquad (10)$$

La valeur positive de σ_c correspond à la compression de la couche de la colle. On peut, d'après les formules (6) et (10), tracer les courbes de variation des contraintes tangentielles et normales dans la couche de la colle et, d'après les formules (5) et (9), dessiner les épures des forces normales et des moments fléchissants dans la plaque d'en haut.

Pour le cas d'un très long assemblage par colle, le problème se trouve sensiblement simplifié par le fait que les contraintes dans la couche de la colle portent un caractère local. Dans ce cas, lors de la détermination de N et Y l'on peut relever de la solution la partie qui s'évanouit et poser

$$N=Ae^{-\alpha x}-\frac{3}{4h}(M+Qx),$$
$$Y=e^{-kx}(C_1\sin kx+C_2\cos kx)+\frac{1}{2}(M+Qx).$$

Les constantes A, C_1 et C_2 se déterminent des conditions aux limites à l'extrémité gauche, c'est-à-dire pour $x = 0$, où $N = 0$, $Y = M$, tandis que $Y' = Q$.

78. Si l'on considère les rayons comme un milieu élastique continu, la force agissant du côté des rayons sera pour n'importe quel point de la jante proportionnelle au déplacement radial w de ce même point. Ainsi, nous avons affaire ici au problème du calcul d'un anneau doté d'une assise élastique. Par unité de longueur de la jante on a $n/2\pi R$ rayons. Sur la jante agit, du côté de chaque rayon, une force $\frac{EF}{l} w$, l étant la longueur d'un rayon ($l \approx R$), F, l'aire de la section transversale d'un rayon.

Ainsi, sur une unité de longueur de la jante agit une force

$$\frac{EFn}{2\pi R^2} w = kw,$$

d'où

$$k = \frac{EFn}{2\pi R^2}. \tag{1}$$

Etablissons maintenant l'équation différentielle de la déformée de l'anneau. Nous prendrons pour variable indépendante l'angle φ compté à partir du sommet de l'anneau (fig. 292).

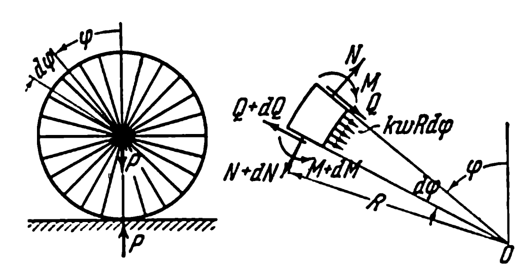


Fig. 292

Prélevons de l'anneau une tranche élémentaire de longueur $Rd\varphi$ et appliquons dans les sections ainsi pratiquées des efforts internes N, Q et M. Sur cette tranche, du côté des rayons, va agir une force $kwR\,d\varphi$. Etablissons pour cette tranche élémentaire les équations d'équilibre. Projetons toutes les forces sur l'axe radial. Nous aurons alors

$$\frac{dQ}{d\varphi} = N + kRw.$$

La condition d'égalité à zéro de la somme des projections de toutes les forces sur un axe tangent à l'arc de cercle donne

$$\frac{dN}{d\varphi} + Q = 0.$$

Faisons s'annuler la somme des moments créés par les forces par rapport au point O

$$R\frac{dN}{d\varphi}+\frac{dM}{d\varphi}=0$$

et éliminons de ces équations Q et N. Nous aurons alors

$$kR^2\frac{dw}{d\varphi}=\frac{dM}{d\varphi}+\frac{d^3M}{d\varphi^3}.$$

Le changement de la courbure $\Delta\,(1/\rho)$ est lié au moment fléchissant M par la relation suivante:

$$M=EJ\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right);$$

or, comme on sait,

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\left(\frac{w}{R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2}\right).$$

Comme pour un déplacement positif w dans le sens dirigé du centre du cercle la courbure de l'anneau diminue, devant le deuxième membre de cette expression on a le signe moins. Dans cette expression, la variation de la courbure s'exprime par deux termes. Le premier terme w/R^2 correspond à une variation de la courbure due à la dilatation simple de l'anneau. Le deuxième terme $\frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2}$, égal à d^2w/ds^2, représente une variation ordinaire de la courbure qui se rencontre aussi dans le cas d'une barre droite.

Maintenant, après substitution de M, l'équation différentielle acquiert sa forme définitive suivante:

$$\frac{d^5w}{d\varphi^5}+2\frac{d^3w}{d\varphi^3}+a^2\frac{dw}{d\varphi}=0,$$

avec

$$a^2=\frac{R^4k}{EJ}+1. \tag{2}$$

La solution de ce problème sera

$$w=C_0+C_1\operatorname{ch}\alpha\varphi\cos\beta\varphi+C_2\operatorname{sh}\alpha\varphi\sin\beta\varphi+C_3\operatorname{ch}\alpha\varphi\sin\beta\varphi+\\+C_4\operatorname{sh}\alpha\varphi\cos\beta\varphi,$$

avec

$$\alpha=\sqrt{\frac{a-1}{2}},\quad \beta=\sqrt{\frac{a+1}{2}}. \tag{3}$$

Comme l'anneau se déforme symétriquement par rapport à l'axe vertical, la fonction w doit être une fonction paire, c'est-à-dire doit rester la même lorsque le signe de φ change de plus à moins. Aussi, nous poserons égales à zéro les constantes C_3 et C_4 accompagnant les fonctions impaires. Les autres constantes se déterminent des conditions suivantes:

a) pour $\varphi=\pi$, $\dfrac{dw}{d\varphi}=0$,

b) pour $\varphi=\pi$, $Q=-\dfrac{P}{2}$,

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} w\,d\varphi=0.$

Cette dernière condition signifie que quand la roue est sollicitée par une charge, les points supérieur et inférieur restent sur la même verticale. En effet, si l'on considère un élément de la jante de la roue avant et après la déformation (fig. 293), il n'est pas difficile d'établir que la condition de son inextensibilité aura la forme suivante

$$dv+w\,d\varphi=0,$$

où v est le déplacement selon la tangente à l'arc du contour ou

$$v=-\int w\,d\varphi.$$

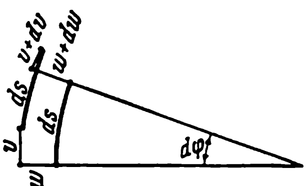


Fig. 293

Comme le déplacement selon la tangente dans les points $\varphi=0$ et $\varphi=\pi$ est nul, de là on tire la condition c).

Avec $C_3=C_4=0$, les équations du moment fléchissant

$$M=-\frac{EJ}{R^2}\left(w+\frac{d^2w}{d\varphi^2}\right)$$

et de l'effort tranchant

$$Q=\frac{1}{R}\frac{dM}{d\varphi}$$

prennent la forme suivante

$$M=-\frac{EJ}{R^2}\left(C_0-2\alpha\beta C_1\operatorname{sh}\alpha\varphi\sin\beta\varphi+2\alpha\beta C_2\operatorname{ch}\alpha\varphi\cos\beta\varphi\right),$$

$$Q=2\alpha\beta\frac{EJ}{R^3}\left[(\alpha C_1-\beta C_2)\operatorname{ch}\alpha\varphi\sin\beta\varphi+(\beta C_1-\alpha C_2)\operatorname{sh}\alpha\varphi\cos\beta\varphi\right].$$

Maintenant, en développant les conditions aux limites a), b) et c), nous obtenons

a) $C_1[\alpha\operatorname{sh}\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\operatorname{ch}\alpha\pi\sin\beta\pi]+$
$$+C_2[\beta\operatorname{sh}\alpha\pi\cos\beta\pi+\alpha\operatorname{ch}\alpha\pi\sin\beta\pi]=0,$$

b) $C_1(\alpha\operatorname{ch}\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\operatorname{sh}\alpha\pi\cos\beta\pi)-$
$$-C_2(\alpha\operatorname{sh}\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\operatorname{ch}\alpha\pi\sin\beta\pi)=-\frac{P}{4EJ}\frac{R^3}{\alpha\beta},$$

c) $C_0\pi+\dfrac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\operatorname{sh}\alpha\pi\cos\beta\pi+\beta\operatorname{ch}\alpha\pi\sin\beta\pi)+$
$$+\frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\operatorname{ch}\alpha\pi\sin\beta\pi-\beta\operatorname{sh}\alpha\pi\cos\beta\pi)=0.$$

Résolvons ces équations

$$C_0 = \frac{PR^3}{2\pi a^2 EJ},$$

$$C_1 = -\frac{P}{4EJ}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\,\text{ch}\,\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\,\text{sh}\,\alpha\pi\cos\beta\pi}{a(\text{sh}^2\,\alpha\pi+\sin^2\beta\pi)},$$

$$C_2 = \frac{P}{4EJ}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\,\text{sh}\,\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\,\text{ch}\,\alpha\pi\sin\beta\pi}{a(\text{sh}^2\,\alpha\pi+\sin^2\beta\pi)}.$$

En définitive, les expressions de w et M prennent la forme suivante :

$$w = \frac{PR^3}{4\alpha\beta EJ}\left(\frac{2\alpha\beta}{\pi a^2} - A\,\text{ch}\,\alpha\varphi\cos\beta\varphi + B\,\text{sh}\,\alpha\varphi\sin\beta\varphi\right), \tag{4}$$

$$M = -\frac{PR}{2}\left(\frac{1}{\pi a^2} + A\,\text{sh}\,\alpha\varphi\sin\beta\varphi + B\,\text{ch}\,\alpha\varphi\cos\beta\varphi\right); \tag{5}$$

dans ces expressions on a introduit, pour simplifier, les notations suivantes

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\alpha\,\text{ch}\,\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\,\text{sh}\,\alpha\pi\cos\beta\pi}{a(\text{sh}^2\,\alpha\pi+\sin^2\beta\pi)}, \\ B &= \frac{\alpha\,\text{sh}\,\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\,\text{ch}\,\alpha\pi\sin\beta\pi}{a(\text{sh}^2\,\alpha\pi+\sin^2\beta\pi)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

L'effort revenant à un rayon sera, évidemment, égal à

$$P_r = \frac{EF}{R}w. \tag{7}$$

Effectuons un calcul numérique. Des expressions (1) et (2) nous obtenons, en supposant égaux les modules d'élasticité des rayons et de la jante,

$$a^2 = \frac{R^2Fn}{2\pi J} + 1 = \frac{\frac{\pi\cdot 0{,}2^2}{4}\cdot 36\cdot 31^2}{2\pi\cdot 0{,}3} + 1 = 577{,}7, \quad a = 24{,}04.$$

De plus, conformément à (3), nous aurons

$$\alpha = \sqrt{\frac{24{,}04-1}{2}} = 3{,}395, \qquad \beta = \sqrt{\frac{24{,}04+1}{2}} = 3{,}539.$$

Trouvons maintenant

$$\text{sh}\,\alpha\pi \approx \text{ch}\,\alpha\pi \approx \frac{1}{2}e^{10{,}66},$$

$$\sin\beta\pi = -0{,}992, \quad \cos\beta\pi = +0{,}1223.$$

D'après (6), nous aurons

$$A = -0{,}245e^{-10{,}66}, \qquad B = +0{,}326e^{-10{,}66}.$$

Les équations (5) et (7) peuvent être mises sous la forme suivante :

$$M = P\,(-0{,}00855 + 3{,}80e^{-10{,}66}\,\text{sh}\,\alpha\varphi\sin\beta\varphi -$$
$$- 5{,}05e^{-10{,}66}\,\text{ch}\,\alpha\varphi\cos\beta\varphi), \ \text{kgfcm},$$

$$P_r = P\,(0{,}0278 + 0{,}514e^{-10{,}66}\,\text{ch}\,\alpha\varphi\cos\beta\varphi +$$
$$+ 0{,}683e^{-10{,}66}\,\text{sh}\,\alpha\varphi\sin\beta\varphi) \ \text{kgf}.$$

De là, on voit que pour de petites valeurs de φ le deuxième et le troisième terme entre parenthèses seront très petits, et M et P_r ne changeront pratiquement pas. En nous basant sur ces expressions, construisons les épures du moment fléchissant M et des efforts P_r agissant dans les rayons (fig. 294).

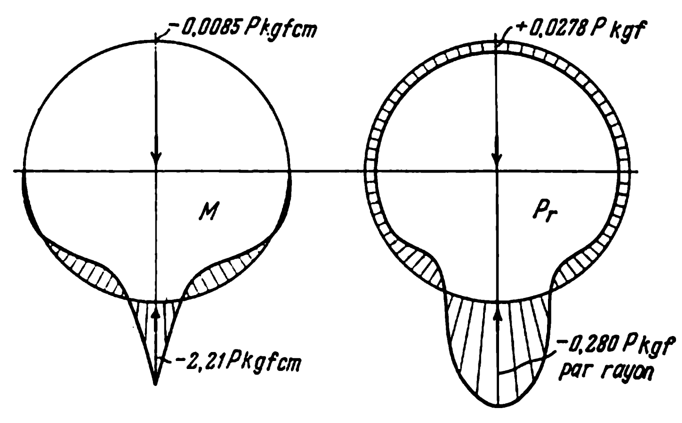


Fig. 294

Pour une force $P = 40$ kgf, nous obtenons : $M_{max} = 88$ kgfcm ; l'effort maximum agissant dans un rayon $P_{r\,max} = 11{,}2$ kgf. L'on comprend que dans le résultat obtenu, il n'a pas été tenu compte de la précontrainte des rayons qu'on leur implique lors de l'assemblage. Naturellement, cette précontrainte doit être plus grande en valeur absolue que $P_{r\,max}$.

Ce problème a été résolu pour la première fois par N. Joukovsky.

79. Prélevons de la plaque bimétallique une tranche élémentaire ayant une longueur ds et une incurvation initiale de la surface de scellement $1/\rho_0$ (les éléments bimétalliques sont souvent curvilignes) (fig. 295).

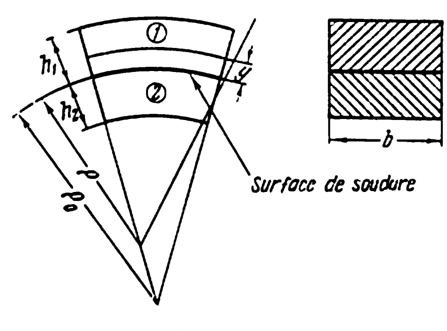


Fig. 295

L'allongement relatif d'une fibre située à une distance y de la surface de scellement comprend : l'allongement dans le scellement ε_0 et l'allongement dû à la flexion de la plaque

$$y\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right),$$

$\frac{1}{\rho}$ étant la nouvelle courbure. Ainsi,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right).$$

Retranchant de là l'allongement thermique et multipliant la différence obtenue par le module d'élasticité E, trouvons la contrainte agissant dans une fibre située à une distance y de la surface de scellement. On aura pour la première plaque

$$\sigma_1 = E_1\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_1 t\right] \quad (0 \leqslant y \leqslant h_1),$$

pour la seconde,

$$\sigma_2 = E_2\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_2 t\right] \quad (-h_2 \leqslant y \leqslant 0);$$

E_1 et E_2 sont les modules d'élasticité de la première et de la deuxième plaque.

L'effort normal et le moment fléchissant dans la section d'un élément bimétallique sont nuls. C'est pourquoi

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 b\, dy + \int_{-h_2}^{0} \sigma_2 b\, dy = 0, \quad \int_0^{h_1} \sigma_1 by\, dy + \int_{-h_2}^{0} \sigma_2 by\, dy = 0.$$

Remplaçant dans ces équations σ_1 et σ_2 et calculant les intégrales nous aurons

$$\varepsilon_0 (E_1h_1 + E_2h_2) - (\alpha_1E_1h_1 + \alpha_2E_2h_2)\, t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 (E_1h_1^2 - E_2h_2^2) - \frac{1}{2}(E_1\alpha_1h_1^2 - E_2\alpha_2h_2^2)\, t +$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^3 + E_2h_2^3) = 0.$$

Excluons de là ε_0 et trouvons la variation de la courbure

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{6t(\alpha_1 - \alpha_2)}{\frac{(E_1h_1^2 - E_2h_2^2)^2}{E_1E_2h_1h_2(h_1 + h_2)} + 4(h_1 + h_2)}.$$

La variation de la courbure est proportionnelle au changement de la température et à la différence des coefficients de dilatation thermique. Comme on le voit du résultat obtenu, la plus grande variation de la courbure va avoir lieu lorsque les épaisseurs des plaques composantes seront choisies de façon à assurer que

$$E_1h_1^2 = E_2h_2^2.$$

Dans ce cas on aura

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2}\, t\, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2}.$$

80. D'après les données du problème, on peut considérer la section de l'anneau comme non déformable. Le déplacement de toute figure dans un plan peut, comme on sait, être représenté sous forme de deux déplacements linéaires d'un point quelconque de cette figure et de la rotation ultérieure de toute la figure, considérée comme un tout, autour de ce point.

Choisissons un point quelconque de la section de l'anneau, par exemple le point O (fig. 296) situé sur le rayon intérieur a sur le scellement des anneaux. Maintenant le déplacement total de la section de l'anneau peut être représenté sous forme de déplacements successifs du point O le long de l'axe de symétrie, perpendiculairement à ce dernier, et de rotation d'un angle φ autour du point O.

Pour ce qui est du premier déplacement, il correspond au déplacement de l'anneau considéré comme un tout rigide et ne provoque

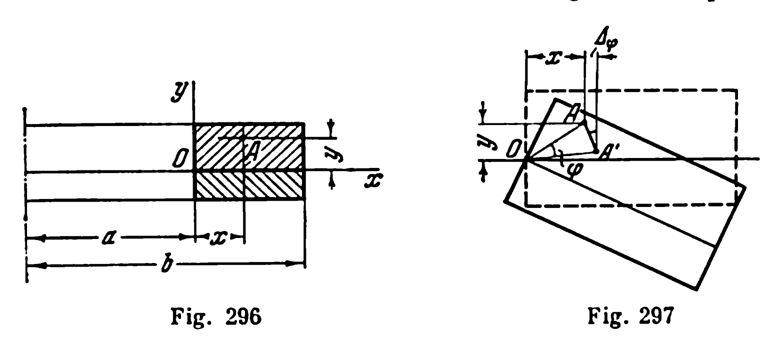


Fig. 296

Fig. 297

pas de déformations de ce dernier. C'est pourquoi, nous n'allons pas le prendre en considération. Désignons par Δ la seconde composante du déplacement linéaire. Le déplacement radial du point A va, de cette façon-là, comprendre le déplacement Δ ainsi qu'un déplacement dû à la rotation de la section autour du point O. Cette seconde composante Δ_φ sera, comme on le voit de la fig. 297, égale à

$$\Delta_\varphi = y\varphi$$

(l'angle φ est considéré comme petit).

Le déplacement radial du point A sera

$$\Delta + y\varphi,$$

tandis que l'allongement relatif circonférentiel sera de

$$\varepsilon = \frac{\Delta + y\varphi}{a + x}.$$

La contrainte circonférentielle pour le premier anneau est égale à

$$\sigma_1 = E_1 \left(\frac{\Delta + y\varphi}{a + x} - \alpha_1 t \right) \quad (0 \leqslant y \leqslant h_1),$$

pour le second anneau

$$\sigma_2 = E_2 \left(\frac{\Delta + y\varphi}{a + x} - \alpha_2 t \right) \quad (-h_2 \leqslant y \leqslant 0).$$

Si l'on sectionne l'anneau au moyen d'un plan axial diamétral et considère la condition d'équilibre de la moitié de l'anneau, l'on

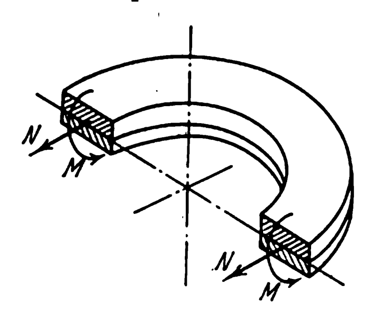


Fig. 298

se convainc facilement de ce que le moment fléchissant M et la force normale N dans les sections de cet anneau sont nuls (fig. 298). Par conséquent,

$$N = \int_0^{b-a}\int_0^{h_1} \sigma_1\, dx\, dy + \int_0^{b-a}\int_{-h_2}^{0} \sigma_2\, dx\, dy = 0,$$

$$M = \int_0^{b-a}\int_0^{h_1} \sigma_1 y\, dx\, dy + \int_0^{b-a}\int_{-h_2}^{0} \sigma_2 y\, dx\, dy = 0.$$

Remplaçant dans ces équations σ_1 et σ_2, trouvons

$$E_1\left[\left(h_1\Delta + \frac{h_1^2\varphi}{2}\right)\ln\frac{b}{a} - \alpha_1 t\,(b-a)\,h_1\right] + \\ + E_2\left[\left(h_2\Delta - \frac{h_2^2\varphi}{2}\right)\ln\frac{b}{a} - \alpha_2 t\,(b-a)\,h_2\right] = 0,$$

$$E_1\left[\left(\frac{h_1^2}{2}\Delta + \frac{h_1^3}{3}\varphi\right)\ln\frac{b}{a} - \alpha_1 t\,(b-a)\frac{h_1^2}{2}\right] + \\ + E_2\left[\left(-\Delta\frac{h_2^2}{2} + \frac{h_2^3}{3}\varphi\right)\ln\frac{b}{a} + \alpha_2 t\,(b-a)\frac{h_2^2}{2}\right] = 0.$$

De là, nous trouvons, en excluant Δ,

$$\varphi = \frac{b-a}{\ln\frac{b}{a}}\,\frac{6t\,(\alpha_1-\alpha_2)}{\frac{(E_1h_1^2-E_2h_2^2)^2}{E_1E_2h_1h_2\,(h_1+h_2)} + 4\,(h_1+h_2)}.$$

Tout comme dans le cas étudié plus haut, φ atteindra sa valeur maximale si

$$E_1h_1^2 = E_2h_2^2.$$

Dans ce cas, l'angle cherché est égal à

$$\varphi = \frac{b-a}{\ln\frac{b}{a}}\cdot\frac{3t\,(\alpha_1-\alpha_2)}{2\,(h_1+h_2)}.$$

81. Ce capteur ne va pas travailler puisque la plaque bimétallique, encastrée aux extrémités, ne change pas de courbure sous l'action d'un échauffement uniforme.

En effet, si la plaque était librement appuyée, elle s'incurverait sous un échauffement uniforme selon un arc de cercle. Dans le cas présent, sur la plaque agissent également des moments du côté des encastrements. Sous leur action, la plaque s'incurvera également selon un arc de cercle, mais dans une direction opposée (fig. 299).

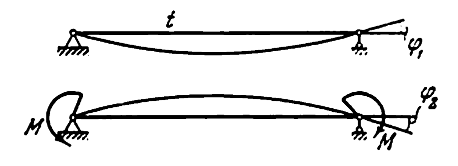


Fig. 299

Avec cela, en imposant la condition d'égalité des angles de rotation φ_1 et φ_2 aux extrémités de la plaque, nous devons infailliblement exiger l'égalité des courbures des deux cercles, et cela signifie que les angles de rotation et les déplacements résultants sont nuls dans tous les points de la plaque (si la condition $\varphi_1 = \varphi_2$ est observée). Ainsi, une plaque bimétallique encastrée aux extrémités ne va guère s'incurver sous un échauffement uniforme.

Par conséquent, pour que le système en question (fig. 76) réponde à l'objet de sa destination, il suffit, par exemple, de remplacer l'encastrement de la plaque par des appuis articulés.

82. Sectionnons mentalement la structure et dans la section ainsi pratiquée appliquons des efforts internes M_0, N et Q (fig. 300).

Ces efforts donnent dans la section A un moment fléchissant

$$M_{\text{fl}} = M_0 + Qx + Ny.$$

Le châssis ainsi sectionné va changer de courbure lors de l'échauffement. La variation de la courbure restera constante pour tous les points du contour du châssis puisque la température et la forme de la section transversale restent constantes. Mais s'il en est ainsi, l'action de la température peut être remplacée par l'action d'un certain moment équivalent M_t appliqué dans la section pratiquée.

Exigeons maintenant que les déplacements linéaires et angulaires des sections, les uns par rapport aux autres, i.e. déplacements dus au moment M_0 et aux forces Q et N soient égaux aux déplacements analogues dus à l'action des moments thermiques équivalents M_t.

Les moments fléchissants dus aux efforts unitaires (fig. 301) correspondants M_0, Q et N auront les valeurs suivantes :

$$1, \; x, \; y.$$

Nous obtenons ainsi

$$\int_s (M_0+Qx+Ny)\cdot 1\cdot ds=\int_s M_t\cdot 1\cdot ds,$$

$$\int_s (M_0+Qx+Ny)\,x\,ds=\int_s M_t x\,ds,$$

$$\int_s (M_0+Qx+Ny)\,y\,ds=\int_s M_t y\,ds$$

ou

$$(M_0-M_t)\int_s ds+Q\int_s x\,ds+N\int_s y\,ds=0,$$

$$(M_0-M_t)\int_s x\,ds+Q\int_s x^2\,ds+N\int_s yx\,ds=0,$$

$$(M_0-M_t)\int_s y\,ds+Q\int_s xy\,ds+N\int_s y^2\,ds=0,$$

de là trouvons les efforts: $Q=N=0$, $M_0=M_t$.

Par conséquent, le moment M_0 est égal au moment équivalent M_t dû à l'action de la température. Cela signifie que la variation de

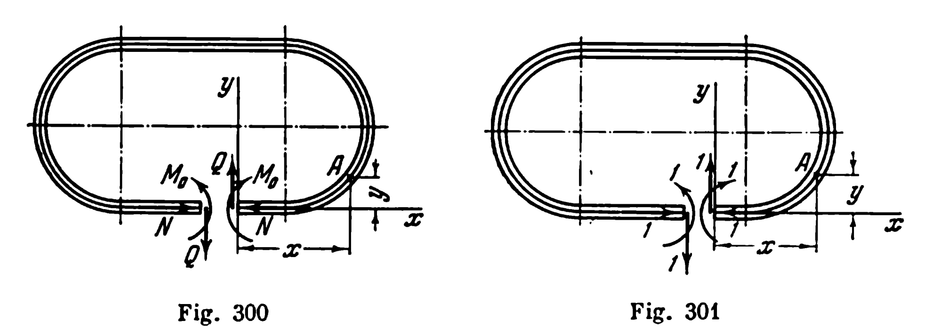


Fig. 300 Fig. 301

la courbure donnée par les moments M_0 sera égale à la variation de la courbure créée par la température. Ainsi, la courbure d'un châssis bimétallique au contour fermé, soumis à un échauffement uniforme, reste invariable.

83. Tant que la poutre travaille dans la phase élastique, nous aurons

$$\frac{1}{\rho}=\frac{12M}{Ea^4} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\rho}=12\,\frac{M}{Ea^3},$$

et il y aura une dépendance linéaire entre la courbure et le moment; cette dépendance restera en vigueur tant que la contrainte maximale

n'aura pas atteint la limite d'élasticité $\sigma_{él}$. Cela aura lieu pour

$$\sigma_{él}=\frac{12M}{a^4}y_{max} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{Ea^3}=\frac{1}{12}\frac{\sigma_{él}}{E}\frac{a}{y_{max}}.$$

Respectivement pour chaque section nous aurons

$$\text{I.} \quad \frac{M}{Ea^3}=3{,}33\cdot 10^{-4},$$

$$\text{II.} \quad \frac{M}{Ea^3}=2{,}36\cdot 10^{-4},$$

$$\text{III.} \quad \frac{M}{Ea^3}=2{,}92\cdot 10^{-4}.$$

Pour un moment fléchissant plus grand que celui qu'on vient d'indiquer, il convient de considérer, dans une section transversale de la poutre, deux zones: une zone élastique ($0\leqslant y\leqslant y_{él}$) et une zone plastique ($y_{él}\leqslant y\leqslant y_{max}$) (fig. 302).

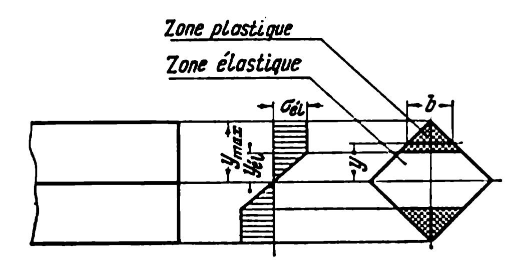


Fig. 302

Le moment fléchissant dans la section est donné par l'expression suivante

$$M=2\int_{0}^{y_{él}}\sigma yb\,dy+2\int_{y_{él}}^{y_{max}}\sigma_{él}yb\,dy.$$

L'allongement relatif sera $\varepsilon=y/\rho$. Dans la zone élastique nous aurons $\sigma=Ey/\rho$, tandis qu'à la frontière entre les deux zones, $y_{él}=\sigma_{él}\rho/E$. Ainsi,

$$\frac{M}{Ea^3}=\frac{a}{\rho}\cdot\frac{2}{a^4}\int_{0}^{\sigma_{él}\rho/E}by^2\,dy+\frac{2}{a^3}\frac{\sigma_{él}}{E}\int_{\sigma_{él}\rho/E}^{y_{max}}by\,dy.$$

Pour chacune des sections nous aurons, après intégration:

$$\text{I.} \quad \frac{M}{Ea^3}=\frac{1}{4}\frac{\sigma_{él}}{E}-\frac{1}{3}\frac{\sigma_{él}^3}{E^3}\frac{\rho^2}{a^2},$$

$$\text{II.} \quad \frac{M}{Ea^3}=\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\sigma_{él}}{E}-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sigma_{él}^3}{E^3}\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{1}{3}\frac{\sigma_{él}^4}{E^4}\frac{\rho^3}{a^3},$$

III. $\dfrac{M}{Ea^3}=\dfrac{1}{6\pi}\dfrac{a}{\rho}\arcsin\alpha+\dfrac{1}{6}\dfrac{\sigma_{él}}{E}(3\pi)^{-3/4}(5-2\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}$

$$\left(\alpha=\frac{\sigma_{él}}{E}\frac{\rho}{a}\sqrt[4]{3\pi}\right).$$

Sur la fig. 303 sont représentées les courbes $M/Ea^3 = f(a/\rho)$. Dans chaque cas, pour $a/\rho \to \infty$, le moment M a une valeur limite (que

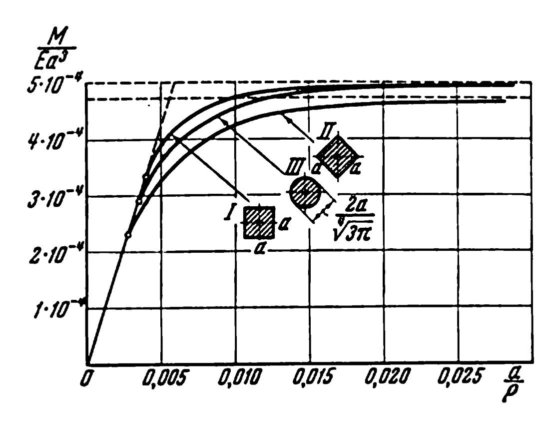


Fig. 303

l'on appelle moment de la rotule plastique). C'est cette valeur qui détermine la charge limite de la poutre. Respectivement, pour chacune des sections nous obtenons pour $\sigma_{él}/E = 0{,}002$

I. $\dfrac{M_{\lim}}{Ea^3}=0{,}0005$, II. $\dfrac{M_{\lim}}{Ea^3}=0{,}000471$, III. $\dfrac{M_{\lim}}{Ea^3}=0{,}000497$.

Si les sections n'étaient pas symétriques par rapport à l'axe horizontal, la solution serait beaucoup plus compliquée. Dans ce cas, il aurait été indispensable de déterminer au préalable où se situe l'axe neutre, en se basant sur la condition

$$\int_F \sigma\, dF = 0.$$

84. La rigidité en flexion dépend de la valeur du moment préalablement appliqué M_x ou, ce qui revient au même, de ceci jusqu'à quelle profondeur s'est étendue la zone plastique dans la section, c'est-à-dire de la valeur de $y_{él}$.

Après l'application du moment M_y, la courbure de la poutre variera dans un plan comme dans l'autre, et dans un point arbitrairement choisi ayant pour coordonnées x et y apparaîtra un allongement supplémentaire

$$\Delta\varepsilon = \varkappa_x y + \varkappa_y x,$$

$\varkappa_x$ et $\varkappa_y$ étant la variation de la courbure de la poutre respectivement dans les plans yz et xz.

Passons aux coordonnées sans dimensions η et ζ:

$$y = \frac{h}{2}\eta, \quad x = \frac{b}{2}\zeta.$$

On aura alors

$$y_{él} = \frac{h}{2}\eta_{él}.$$

Le rectangle $b \times h$ se transforme en un carré 2×2 (fig. 304):

$$\Delta\varepsilon = \varkappa_y \frac{b}{2}(k\eta + \zeta),$$

où $k = \frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}\frac{h}{b}$ est une grandeur qui donne le rapport de variation des courbures dans les deux plans. Elle doit être déterminée à partir de la condition d'invariabilité du moment M_x. La droite $\Delta\varepsilon = 0$ ou $k\eta + \zeta = 0$ (fig. 304) divise les zones de supplément de charge et de décharge. Dans les zones hachurées, la contrainte reste égale à $\pm\sigma_{él}$ et il n'y aura pas de contraintes supplémentaires. Dans la zone non hachurée, la contrainte supplémentaire sera

$$\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon = E\varkappa_y \frac{b}{2}(k\eta + \zeta). \qquad (1)$$

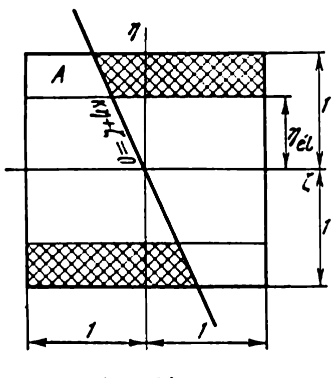


Fig. 304

Déterminons le moment supplémentaire par rapport à l'axe ζ en intégrant les moments élémentaires situés dans les limites du trapèze A et du rectangle supérieur $2 \times \eta_{él}$:

$$\Delta M_x = \int_{\eta_{él}}^{1}\int_{-1}^{-k\eta} \Delta\sigma \cdot \frac{h}{2}\eta \cdot \frac{b}{2}d\zeta \cdot \frac{h}{2}d\eta +$$

$$+ \int_{0}^{\eta_{él}}\int_{-1}^{+1} \Delta\sigma \cdot \frac{h}{2}\eta \cdot \frac{b}{2}d\zeta \cdot \frac{h}{2}d\eta. \qquad (2)$$

D'après les données du problème, ce moment est égal à zéro. A-près intégration, nous obtiendrons

$$3k^2(1 - \eta_{él}^4) - 8k(1 + \eta_{él}^3) + 6(1 - \eta_{él}^2) = 0. \qquad (3)$$

De là on détermine k en fonction de $\eta_{él}$. La relation (3) restera valable tant que la zone A représentera un trapèze. Or, pour $k \geqslant 1$, elle se transforme en triangle, et la droite $k\eta + \zeta = 0$ coupe non pas le côté supérieur, mais bien le côté gauche du carré. Dans ce cas, dans l'équation (2) changera la limite supérieure de la première des

intégrales indiquées, et au lieu de $\int\limits_{\eta_{\acute{e}1}}^{1}$, il faut écrire $\int\limits_{\eta_{\acute{e}1}}^{1/k}$. Avec cela, l'expression (3) prendra la forme suivante:

$$3k^2\left(\frac{1}{k^4}-\eta_{\acute{e}1}^4\right)-8k\left(\frac{1}{k^3}+\eta_{\acute{e}1}^3\right)+6\left(\frac{1}{k^2}-\eta_{\acute{e}1}^2\right)=0,$$

d'où $1-3k^4\eta_{\acute{e}1}^4-8k^3\eta_{\acute{e}1}^3-6k^2\eta_{\acute{e}1}^2=0$. Cette équation se trouve satisfaite pour $k\eta_{\acute{e}1}=1/3$. Par conséquent,

$$k=\frac{1}{3\eta_{\acute{e}1}}. \tag{4}$$

C'est-à-dire, pour $\eta_{\acute{e}1}\leqslant 1/3$, la valeur de k se détermine à partir de l'expression (4), tandis que pour $\eta_{\acute{e}1}\geqslant 1/3$, de l'expression (3).

Déterminons maintenant le moment M_y pour $k\leqslant 1$:

$$M_y=2\int\limits_{\eta_{\acute{e}1}}^{1}\int\limits_{-1}^{-k\eta}\Delta\sigma\cdot\frac{b}{2}\zeta\cdot\frac{b}{2}d\zeta\cdot\frac{h}{2}d\eta+$$

$$+2\int\limits_{0}^{\eta_{\acute{e}1}}\int\limits_{-1}^{+1}\Delta\sigma\cdot\frac{b}{2}\zeta\cdot\frac{b}{2}d\zeta\cdot\frac{h}{2}d\eta. \tag{5}$$

Après intégration, nous obtiendrons

$$M_y=\varkappa_y EJ_y\left[\frac{k^3}{16}(1-\eta_{\acute{e}1}^4)-\frac{3}{8}k(1-\eta_{\acute{e}1}^2)+\frac{1}{2}(1+\eta_{\acute{e}1})\right], \tag{6}$$

où $J_y=b^3h/12$.

L'expression entre crochets est toujours plus petite que l'unité et peut être appelée coefficient de réduction de la rigidité. Désignons-le par β. Pour une barre courbée se trouvant dans le stade élastique $\eta_{\acute{e}1}=1$, $k=0$ et $\beta=1$. Au fur et à mesure qu'augmentent les déformations plastiques préalablement données, le coefficient β diminue.

Pour $k\geqslant 1$, la limite supérieure de la première intégrale dans l'expression (5) est à nouveau remplacée par $1/k$ et, alors,

$$\beta=\frac{k^3}{16}\left(\frac{1}{k^4}-\eta_{\acute{e}1}^4\right)-\frac{3}{8}k\left(\frac{1}{k^2}-\eta_{\acute{e}1}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\eta_{\acute{e}1}\right);$$

après substitution de $k=1/3\eta_{\acute{e}1}$ (4), nous obtiendrons

$$\beta=\frac{32}{27}\eta_{\acute{e}1},$$

expression juste pour $\eta_{\acute{e}1}\leqslant 1/3$.

Pour $1\geqslant\eta_{\acute{e}1}\geqslant 1/3$, il faut, pour déterminer β, trouver au préalable la valeur de k à partir de l'expression (3); et seulement après cela, se servir de l'expression (6). Sur la fig. 305 est représenté le graphique de variation de β en fonction de $\eta_{\acute{e}1}$.

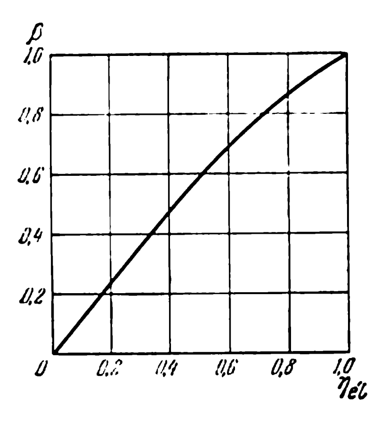


Fig. 305

Fig. 306

85. Tant que le moment M reste pas très grand, les surfaces de contact des rondelles ne se descellent pas. Dans ce cas, la courbure de la poutre va se déterminer d'après la formule ordinaire $\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EJ}=$ $=\frac{64\,M}{E\pi D^4}$. La contrainte maximale de compression dans les rondelles sera

$$\sigma=\frac{4P}{\pi\,(D^2-d^2)}+\frac{32MD}{\pi D^4}.$$

La contrainte maximale de traction dans le boulon est égale à

$$\sigma=\frac{4P}{\pi d^2}+\frac{32Md}{\pi D^4}.$$

Les surfaces de contact dans la partie inférieure de la poutre commenceront à se desceller quand le moment M atteindra la valeur de M_1. Avec cela,

$$\frac{4P}{\pi\,(D^2-d^2)}=\frac{32M_1D}{\pi D^4}, \quad M_1=P\,\frac{D^3}{8\,(D^2-d^2)}.$$

Pour $M>M_1$, les surfaces de contact se descellent partiellement et le problème requiert une nouvelle solution.

Désignons par ρ le rayon de la courbure de l'axe du boulon (fig. 306). L'allongement relatif de n'importe quelle couche, se trouvant à une distance y de l'axe, sera composé de trois parties.

La *première* partie représente l'allongement dû à la précontrainte du système. Pour le boulon, ce sera

$$\varepsilon_b'=\frac{4P}{E\pi d^2}. \tag{1}$$

Pour la rondelle

$$\varepsilon_r'=-\frac{4P}{E\pi\,(D^2-d^2)}. \tag{2}$$

La *deuxième* partie ε_0 représente l'allongement de l'axe que nous ignorons jusqu'à présent, obtenu à la suite de l'incurvation de la poutre (cette valeur est la même pour le boulon et pour les rondelles).

La *troisième* partie, y/ρ (la même pour le boulon et pour les rondelles) représente l'allongement que subirait une fibre par suite de l'incurvation de la poutre si l'axe de cette dernière ne s'était pas allongé. Ainsi, nous obtenons

$$\varepsilon_b = \varepsilon_b' + \varepsilon_0 - \frac{y}{\rho}, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_r' + \varepsilon_0 - \frac{y}{\rho}.$$

Les contraintes correspondantes seront

$$\sigma_b = E\left(\varepsilon_b' + \varepsilon_0 - \frac{y}{\rho}\right), \quad \sigma_r = E\left(\varepsilon_r' + \varepsilon_0 - \frac{y}{\rho}\right).$$

Avec cela, la valeur de ε_r ne peut être que négative (compression), et c'est pourquoi dans l'expression pour σ_r on aura

$$y \geqslant y_1 = \rho(\varepsilon_r' + \varepsilon_0). \tag{3}$$

Ecrivons maintenant les équations d'équilibre:

$$\int_{y_1}^{D/2} \sigma_r \, dF_r + \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_b \, dF_b = 0,$$

$$\int_{y_1}^{D/2} \sigma_r y \, dF_r + \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_b y \, dF_b = -M.$$

Après substitution de σ_b et σ_r et intégration, nous obtenons

$$(\varepsilon_r' + \varepsilon_0) F_r^* - \frac{1}{\rho} S_r^* + (\varepsilon_b' + \varepsilon_0) F_b = 0, \tag{4}$$

$$-E(\varepsilon_r' + \varepsilon_0) S_r^* + \frac{E}{\rho} J_r^* + \frac{E}{\rho} J_b = M, \tag{5}$$

où F_b et J_b sont l'aire et le moment d'inertie d'une section du boulon par rapport au diamètre ; F_r^*, S_r^* et J_r^* sont l'aire, le moment statique et le moment d'inertie de la section de travail de la rondelle, c'est-à-dire

$$F_r^* = \int_{y_1}^{D/2} dF_r, \quad S_r^* = \int_{y_1}^{D/2} y \, dF_r, \quad J_r^* = \int_{y_1}^{D/2} y^2 \, dF_r.$$

Tenant compte des expressions (1), (2) et (3), ramenons l'équation (4) à la forme suivante

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_r' \frac{S_r^* + y_1 (F_r - F_r^*)}{y_1 (F_r^* + F_b) - S_r^*}. \tag{6}$$

De l'équation (5), nous obtenons $\frac{M}{E} = \frac{\varepsilon_r' + \varepsilon_0}{y_1}(J_b + J_r^* - y_1 S_r^*)$.
Substituant ici à ε_0 sa valeur tirée de (6), trouvons

$$\frac{M}{E} = \varepsilon_r'(J_b + J_r^* - y_1 S_r^*) \frac{F_r + F_b}{y_1(F_r^* + F_b) - S_r^*}. \tag{7}$$

Plaçant cette même valeur de ε_0 tirée de (6) dans l'expression (3), nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \varepsilon_r' \frac{F_r + F_b}{y_1(F_r^* + F_b) - S_r^*}. \tag{8}$$

Comme ε_r' est donné et que F_r^*, S_r^*, J_r^* dépendent uniquement de y_1, les expressions (7) et (8) peuvent être considérées comme étant une dépendance paramétrique de la courbure $1/\rho$ par rapport au moment M avec pour paramètre y_1. Il est aisé d'exprimer au moyen de ce paramètre y_1 la contrainte maximale de compression dans les rondelles ainsi que la contrainte maximale de traction dans le boulon:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{comp. r}} &= E\varepsilon_r' \frac{(F_r + F_b)\left(y_1 - \frac{D}{2}\right)}{y_1(F_r^* + F_b) - S_r}, \\ \sigma_{\text{tr. b}} &= E\varepsilon_r' \frac{(F_r + F_b)\left(\frac{S_r^* - y_1 F_r^*}{F_b} + \frac{d}{2}\right)}{y_1(F_r^* + F_b) - S_r^*}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ainsi, le problème peut être considéré comme résolu.

Les calculs doivent se faire de la manière suivante. Se fixant quelques valeurs de y_1, déterminons d'après la formule (7) les valeurs du moment M. Lorsque le moment M ainsi obtenu coïncide

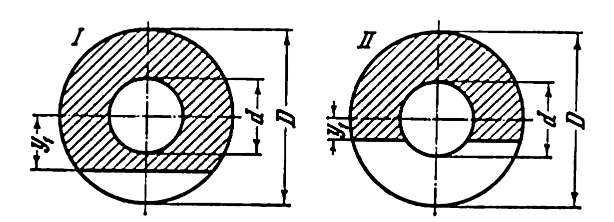


Fig. 307

avec le moment donné, des formules (8) et (9), et pour y_1 correspondant, trouvons: $\frac{1}{\rho}$, σ_r et σ_b.

Il reste encore à écrire les expressions pour F_r^*, S_r^* et J_r^*. Ces grandeurs se déterminent au moyen de l'intégration des expressions

$$dF, \; ydF \text{ et } y^2\,dF$$

sur l'aire de travail des rondelles (fig. 307).

Dans le cas I $\left(-\frac{d}{2} \geqslant y_1 \geqslant -\frac{D}{2}\right)$, nous aurons

$$F_r^* = \frac{D^2}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2y_1}{D} - \frac{2y_1}{D}\sqrt{1-4\frac{y_1^2}{D^2}}\right] - \frac{\pi d^2}{4},$$

$$S_r^* = \frac{D^3}{12}\left(1-4\frac{y_1^2}{D^2}\right)^{3/2},$$

$$J_r^* = \frac{D^4}{64}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2y_1}{D} + \frac{2y_1}{D}\left(1-8\frac{y_1^2}{D^2}\right)\sqrt{1-4\frac{y_1^2}{D^2}}\right] - \frac{\pi d^4}{64}.$$

Dans le cas II $\left(+\frac{d}{2} \geqslant y_1 \geqslant -\frac{d}{2}\right)$, nous obtenons

$$F_r^* = \frac{D^2}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2y_1}{D} - \frac{2y_1}{D}\sqrt{1-4\frac{y_1^2}{D^2}}\right] - \frac{d^2}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2y_1}{d} - \frac{2y_1}{d}\sqrt{1-4\frac{y_1^2}{d^2}}\right]$$

et

$$S_r^* = \frac{D^3}{12}\left(1-4\frac{y_1^2}{D^2}\right)^{3/2} - \frac{d^3}{12}\left(1-4\frac{y_1^2}{d^2}\right)^{3/2},$$

$$J_r^* = \frac{D^4}{64}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2y_1}{D} + \frac{2y_1}{D}\left(1-8\frac{y_1^2}{D^2}\right)\sqrt{1-4\frac{y_1^2}{D^2}}\right] - \frac{d^4}{64}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2y_1}{d} + \frac{2y_1}{d}\left(1-8\frac{y_1^2}{d^2}\right)\sqrt{1-4\frac{y_1^2}{d^2}}\right].$$

On peut aussi obtenir ces valeurs de façon numérique en calculant

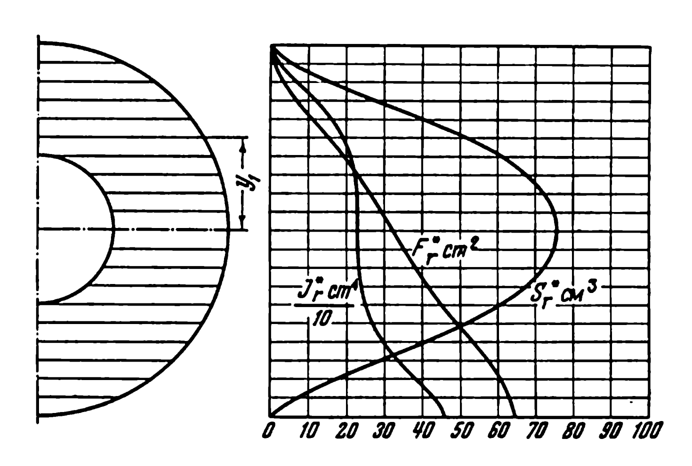


Fig. 308

la somme des aires élémentaires de la section, multipliées par les premières et secondes puissances de y, c'est-à-dire $F_r^* = \Sigma \Delta F_n$, $S_r^* = \Sigma y_n \Delta F_n$, $J_r^* = \Sigma y_n^2 \Delta F_n$ (fig. 308).

Dans les expressions (7), (8) et (9), la précontrainte du système est donnée par le facteur ε'_r (2). Si $P = 0$, $\varepsilon'_r = 0$ et alors évidemment [voir, par exemple, l'expression (7)], $y_1 (F_r^* + F_b) - S_r^* = 0$ (puisque M, généralement parlant, n'est pas nul).

De là on peut trouver la valeur de y_1. Ainsi, quand il n'y a pas de précontrainte, la position de la limite de descellement des rondelles (y_1) ne dépend pas du moment fléchissant et se détermine au moyen de la relation donnée plus haut. Pour $\varepsilon'_r < 0$, la valeur de $y_1 (F_r^* + F_b) - S_r^*$ doit rester négative. C'est pourquoi y_1 sera toujours plus petite que la valeur qu'elle aurait en l'absence de la précontrainte.

III. ÉTAT DE CONTRAINTE COMPOSÉ ET THÉORIES DE RÉSISTANCE

86. a) Dans le cas représenté sur la fig. 81, *a* le diamètre augmente de $\frac{\mu}{E}pd_1$, le volume diminue de $p\frac{1-2\mu}{E}V$.

b) Dans le cas représenté sur la fig. 81, *b* le diamètre diminue de $\frac{1-\mu}{E}pd_1$, le volume diminue de $2p\frac{1-2\mu}{E}V$.

c) Dans le cas représenté sur la fig. 81, *c* le diamètre diminue de $\frac{1-2\mu}{E}pd_1$, le volume diminue de $3p\frac{1-2\mu}{E}V$, V étant le volume initial de la cavité intérieure.

87. Examinons une barre en bois (fig. 309). Dirigeons l'axe z le long des fibres, l'axe x, suivant la normale aux couches annuelles, et l'axe y, suivant la tangente à ces dernières. Les plans des coordonnées coïncident avec les plans de symétrie élastique.

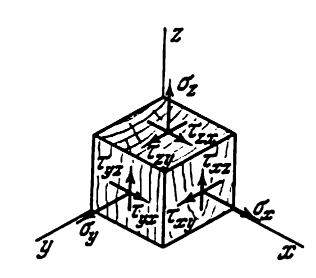


Fig. 309

L'allongement relatif dans la même direction que l'axe x dépendra linéairement des contraintes σ_x, σ_y et σ_z, c'est-à-dire

$$\varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z,$$

C_{11}, C_{12}, C_{13} étant les constantes élastiques.

Par analogie, l'on peut écrire:

$$\varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z,$$

$$\varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z.$$

Les angles de cisaillement sont proportionnels aux contraintes tangentielles correspondantes:

$$\gamma_{yz} = C_{44}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = C_{55}\tau_{zx}, \quad \gamma_{xy} = C_{66}\tau_{xy}.$$

Il est aisé d'établir que d'après le principe de la réciprocité des déplacements $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$, $C_{23} = C_{32}$. Ainsi, nous obtenons 9 constantes élastiques: C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}, C_{55} et C_{66}.

L'on peut montrer que ces constantes élastiques sont indépendantes. Cette anisotropie qu'on vient d'étudier porte le nom d'anisotropie rhombique.

88. Toute surface passant par les axes x, y ou z et ayant un même angle de pente par rapport à deux autres axes sera principale.

Prélevons (fig. 82) de l'élément un nouveau parallélépipède élémentaire comme c'est indiqué sur la fig. 310. L'axe x' est principal

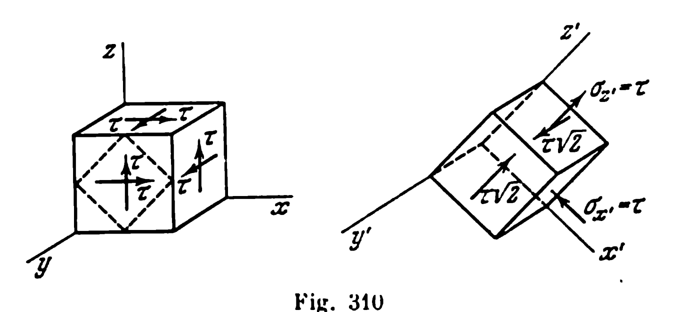


Fig. 310

($\sigma_{x'} = -\tau$). Les autres contraintes principales s'obtiennent de la formule

$$\sigma_{pr} = \frac{\sigma_{z'}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_{z'}^2}{4} + \tau_{y'z'}^2}$$

ou

$$\sigma_{pr} = \frac{\tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{4} + (\tau\sqrt{2})^2}, \quad \sigma' = -\tau, \quad \sigma'' = +2\tau.$$

Ainsi, nous obtenons:

$$\sigma_1 = 2\tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Ce problème peut aussi être résolu en se servant de la méthode générale de définition des contraintes principales, méthode connue de la théorie de l'état de contrainte à trois dimensions. Reprenons de cette théorie le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(A)}$$

Dans notre cas,

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau.$$

C'est pourquoi

$$\begin{vmatrix} -\sigma & \tau & \tau \\ \tau & -\sigma & \tau \\ \tau & \tau & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\sigma^3 - 3\tau^2\sigma - 2\tau^3 = 0,$$

de là trouvons les trois racines de l'équation :

$$\sigma_1 = 2\tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma^{\varepsilon} = -\tau.$$

89. Il faut montrer que dans le premier cas au moins une et dans le second cas, deux contraintes principales sont nulles.

Pour ce faire, écrivons l'équation (A) (p. 193) sous la forme suivante :

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0,$$

où

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$
$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2,$$
$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

sont les invariantes de l'état de contrainte.

D'après les propriétés du déterminant, on aura dans le premier cas

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ k\sigma_x & k\tau_{xy} & k\tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0,$$

et une des racines de l'équation cubique devient nulle.

Dans le second cas, $J_3 = 0$ et $J_2 = 0$ et, par conséquent, deux racines de l'équation cubique deviennent nulles.

Se servant de ces considérations, l'on peut directement dire que l'état de contrainte suivant

$$\begin{pmatrix} 800 & 200 & 400 \\ 200 & 50 & 100 \\ 400 & 100 & 200 \end{pmatrix}$$

est monoaxial.

90. Les deux états de contrainte sont dangereux au même degré. En effet, le travail effectué par les contraintes normales dans le premier cas sera égal au travail réalisé par les mêmes contraintes dans le second cas. Il en est de même pour ce qui est des efforts tangentiels. Par conséquent, l'énergie interne sera aussi la même dans les deux cas. Dans le cadre de la théorie énergétique de résistance, il

s'agit là de la condition d'après laquelle des états de contrainte représentent un même danger (condition d'équivalence des états de contrainte) et ce, indépendamment de quelle théorie de résistance il s'agit : la théorie de résistance de l'énergie de changement de forme ou la théorie de résistance de l'énergie totale.

91. Etudions l'état de contrainte d'un élément prélevé du cylindre à une distance x plus bas que le niveau du liquide (fig. 311).

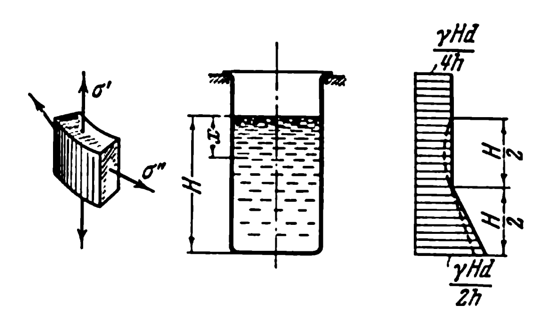


Fig. 311

La contrainte σ' est constante tout au long de la génératrice et est égale au poids du liquide $\gamma \frac{\pi d^2}{4} H$ divisé par l'aire de la section normale du cylindre :

$$\sigma' = \gamma \frac{Hd}{4h}.$$

Plus haut que le niveau de liquide, $\sigma'' = 0$ et plus bas,

$$\sigma'' = \frac{pd}{2h} = \frac{\gamma x d}{2h}.$$

La contrainte équivalente sera $\sigma_{\acute{e}q} = \sigma_1 - \sigma_3$. Par conséquent, pour $\sigma' \geqslant \sigma''$ nous aurons $\sigma_{\acute{e}q} = \sigma' - 0 = \sigma'$.

Pour $\sigma' \leqslant \sigma''$ nous obtenons

$$\sigma_{\acute{e}q} = \sigma'' - 0 = \sigma''.$$

Ainsi, pour $x \leqslant \frac{H}{2}$

$$\sigma_{\acute{e}q} = \sigma' = \frac{\gamma H d}{4h},$$

pour $x \geqslant \frac{H}{2}$

$$\sigma_{\acute{e}q} = \sigma'' = \frac{\gamma x d}{2h}.$$

Sur la fig. 311 on a montré l'épure de $\sigma_{\acute{e}q}$. Cette épure présente une discontinuité pour $x = \frac{H}{2}$, ce qui s'explique par le fait que dans ce point les surfaces correspondant aux contraintes σ_1 et σ_2 changent de places. L'épure de $\sigma_{\acute{e}q}$ obtenue d'après la théorie énergétique de résistance est représentée en pointillé sur la fig. 311.

92. Examinons l'état de contrainte des points du cylindre situés sur la génératrice d'en haut (A) et sur celle d'en bas (B) (fig. 312); ici, σ'_p et σ''_p sont les contraintes dues à la pression p, σ'_M la contrainte de flexion.

Il est aisé d'établir que

$$\sigma'_p = \frac{pd}{4h},$$
$$\sigma''_p = \frac{pd}{2h}, \qquad (1)$$
$$\sigma'_M = \frac{4M}{\pi d^2 h},$$

et puisque $2\sigma'_p = \sigma''_p$, aussi bien dans le point A que dans le point B, on aura pour

$$|\sigma'_M| \leqslant \sigma'_p$$

la condition suivante:

$$\sigma_{\text{éq}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma''_p - 0 = \sigma''_p.$$

Mais si $|\sigma'_M| > \sigma'_p$, on aura dans le point A

$$\sigma_{\text{éq}} = \sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma'_p + \sigma'_M) - 0 = \sigma'_p + \sigma'_M,$$

tandis que dans le point B

$$\sigma_{\text{éq}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma''_p + (\sigma'_M - \sigma'_p) = \sigma'_p + \sigma'_M.$$

Par conséquent, dans tous ces cas, les points A et B représentent le même danger. Sur la fig. 313 on a représenté le graphique de la dépendance de $\sigma_{\text{éq}}$ de σ'_M.

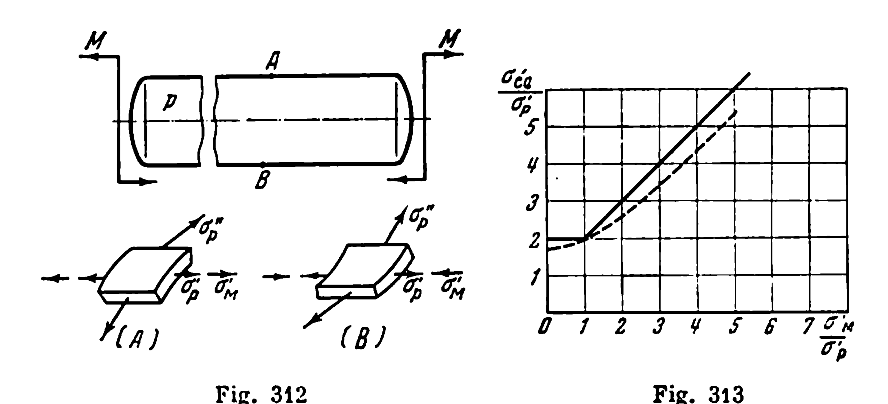


Fig. 312 Fig. 313

Les valeurs de σ'_p, σ''_p et σ'_M se déterminent au moyen des expressions (1). Pour $|\sigma'_M| < \sigma'_p$, le taux de sécurité du système ne dépend pas de la valeur du moment appliqué M. Cette conclusion découle de la théorie de résistance des contraintes tangentielles maximales qui exclut le rôle de σ_2, c'est-à-dire le rôle de la contrainte principale

intermédiaire. Selon la théorie énergétique de résistance, $\sigma_{éq}$ dépend du moment M d'une manière continue. Le graphique de la fig. 313 montre cette dépendance (courbé en pointillé).

93. La solution présentée à la page 39 n'est pas juste puisque le calcul des contraintes σ_1 et σ_2 n'y est pas correct. Etudions la condition d'équilibre d'une partie de la sphère (fig. 314):

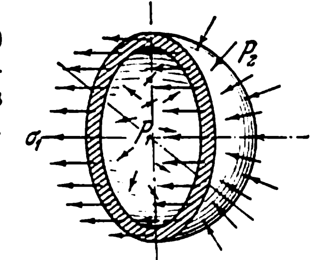


Fig. 314

$$p_1\pi\left(R-\frac{h}{2}\right)^2-p_2\pi\left(R+\frac{h}{2}\right)^2=\sigma_1 2\pi Rh.$$

Dans les conditions ordinaires la grandeur $h/2$ entre parenthèses est négligeable par rapport à R. Il n'est pas permis de le faire ici puisque p_1 et p_2 sont grandes et la différence entre elles, petite. C'est pourquoi

$$(p_1-p_2)R^2-(p_1+p_2)Rh+(p_1-p_2)\frac{h^2}{4}=\sigma_1 2Rh.$$

Dans le premier membre de cette équation, on peut négliger le troisième terme.

Si la différence entre p_1 et p_2 était très grande, on aurait aussi négligé et le second terme, mais il n'est pas permis de le faire maintenant. Ainsi,

$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{(p_1-p_2)R}{2h}-\frac{p_1+p_2}{2},\quad \sigma_3=-p_1.$$

$$\sigma_{éq}=\frac{p_1-p_2}{2h}R-\frac{p_1+p_2}{2}+p_1=510\ \text{kgf/cm}^2,$$

$$n_{él}=\frac{\sigma_{él}}{\sigma_{éq}}=\frac{3000}{510}=5{,}88.$$

94. Désignons par p_1 la pression de contact agissant sur la surface de contact entre le cylindre et le tube et déterminons les contraintes principales pour les deux éléments.

Pour le tube (fig. 315), nous aurons en nous basant sur les conditions d'équilibre

$$\sigma=p_1\frac{R}{h}-p\frac{R+h}{h}.$$

Sur la surface interne les deux autres contraintes principales seront $-p$ et $-p_1$, aussi, l'allongement relatif du pourtour du tube sera

$$\varepsilon_{\text{tube}}=\frac{1}{E_{\text{tube}}}[\sigma-\mu_{\text{tube}}(-p-p_1)],$$

E_{tube} et μ_{tube} étant le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau dont est fabriqué le tube. Après substitution de σ, nous obtenons

$$\varepsilon_{\text{tube}}=\frac{1}{E_{\text{tube}}}\left[\frac{p_1R}{h}-\frac{p(R+h)}{h}+\mu_{\text{tube}}(p+p_1)\right].$$

Pour le cylindre, nous aurons

$$\varepsilon_c = \frac{1}{E_c}\,[-p_1 - \mu_c(-p - p_1)].$$

Or, $\varepsilon_{tube} = \varepsilon_c$; de cette condition trouvons p_1 :

$$p_1 = p\,\frac{\dfrac{1}{E_{tube}}\left(\dfrac{R}{h} + 1 - \mu_{tube}\right) + \dfrac{\mu_c}{E_c}}{\dfrac{1}{E_{tube}}\left(\dfrac{R}{h} + \mu_{tube}\right) + \dfrac{1-\mu_c}{E_c}}.$$

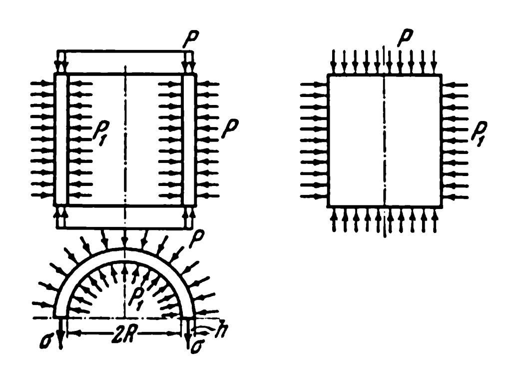


Fig. 315

De l'équation de σ nous obtenons en excluant p_1 :

$$\sigma = p\,\frac{R}{h}\,\frac{\dfrac{1-2\mu_{tube}}{E_{tube}} - \dfrac{1-2\mu_c}{E_c}}{\dfrac{1}{E_{tube}}\left(\dfrac{R}{h} + \mu_{tube}\right) + \dfrac{1-\mu_c}{E_c}} - p.$$

Supposons que

$$\frac{1-2\mu_{tube}}{E_{tube}} > \frac{1-2\mu_c}{E_c}.$$

Il est alors aisé de montrer que $p_1 > p$ et que $\sigma > -p$. Par conséquent,

$$\sigma_1 = \sigma,$$
$$\sigma_2 = -p, \quad \sigma_{éq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma + p_1,$$
$$\sigma_3 = -p_1,$$

d'où

$$\sigma_{éq} = p\left(\frac{R}{h} + 1\right)\frac{\dfrac{1-2\mu_{tube}}{E_{tube}} - \dfrac{1-2\mu_c}{E_c}}{\dfrac{1}{E_{tube}}\left(\dfrac{R}{h} + \mu_{tube}\right) + \dfrac{1-\mu_c}{E_c}}.$$

Comme R/h est beaucoup plus grand que l'unité,

$$\sigma_{éq} = pE_{tube}\left(\frac{1-2\mu_{tube}}{E_{tube}} - \frac{1-2\mu_c}{E_c}\right),$$

et alors la condition d'apparition des déformations plastiques dans le tube peut être écrite sous la forme suivante

$$pE_{\text{tube}}\left(\frac{1-2\mu_{\text{tube}}}{E_{\text{tube}}}-\frac{1-2\mu_{\text{c}}}{E_{\text{c}}}\right)=\sigma_{\text{él}}.$$

Si $\frac{1-2\mu_{\text{tube}}}{E_{\text{tube}}}<\frac{1-2\mu_{\text{c}}}{E_{\text{c}}}$, nous aurons $p_1<p$. Dans ce cas, il n'y aura pas de contact entre le tube et le cylindre et les deux corps vont se déformer indépendamment l'un de l'autre.

Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de la pression p, résolvons un exemple numérique. Soit un cylindre en acier

$$E_{\text{c}} = 2\cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2, \quad \mu_{\text{c}} = 0,3.$$

Pour un tube en verre organique, on a les données suivantes

$$E_{\text{tube}}=3\cdot 10^4 \text{ kgf/cm}^2; \quad \mu_{\text{tube}}=0,35;$$

$$\sigma_{\text{él}}=750 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les calculs donnent

$$p=\frac{\sigma_{\text{él}}}{1-2\mu_{\text{tube}}-\frac{E_{\text{tube}}}{E_{\text{c}}}(1-2\mu_{\text{c}})}=2550 \text{ kgf/cm}^2.$$

Ce chiffre est approximatif puisqu'on n'a pas tenu compte du changement des propriétés du verre organique sous l'action de la pression et que la valeur de μ_{tube} n'a pas été donnée d'une façon suffisamment précise.

95. Les extrémités du fil incurvé vont être repoussées à l'extérieur par les forces de pression, et cela servira à le tendre. Si l'on

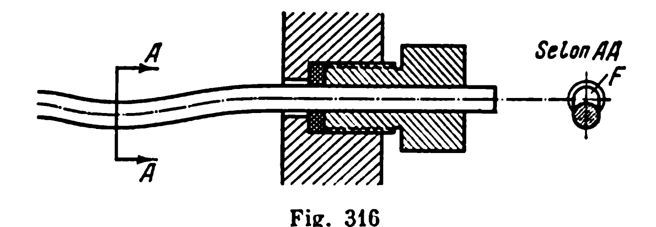


Fig. 316

maintient le fil dans son état incurvé, les forces qui tendent à le repousser seront égales au produit de la pression p par la valeur de l'aire non compensée F (fig. 316; AA est la section la plus déviée de l'axe). L'aire F ne peut, manifestement, pas être plus grande que l'aire de la section du fil.

Si le fil est parfaitement flexible, il prendra tout entier une forme droite et ne connaîtra pas de traction ($F = 0$). Sur la fig. 317 est représenté l'état de contrainte pour ce cas.

Si le fil possède une certaine rigidité en flexion, il ne prendra pas entièrement une forme droite et on observera dans le fil une certaine

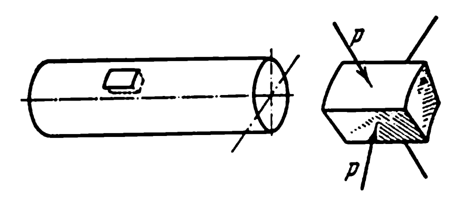


Fig. 317

traction pF. De plus, des contraintes de flexion apparaîtront dans le fil.

96. La procédure décrite pour l'expérience n'élimine pas l'influence du changement de volume. Le changement relatif de volume de la cavité interne du récipient est égal à la variation relative de volume du matériau dont est fabriqué le récipient. C'est pourquoi, pour déterminer la valeur juste du coefficient de compressibilité, il faut ajouter au coefficient obtenu d'après la procédure décrite le coefficient de compressibilité du matériau dont est fait le récipient.

La variation de volume mesurée au ménisque du mercure D est égale à

$$\Delta V = \Delta V_C - \Delta V_A,$$

ΔV_C étant le changement de volume du liquide C, ΔV_A, changement de volume de la cavité interne du récipient. Ainsi,

$$\Delta V_C = \beta_C V p, \qquad \Delta V_A = \beta_A V p,$$

$$\Delta V = pV(\beta_C - \beta_A), \qquad \beta_C = \frac{\Delta V}{pV} + \beta_A,$$

β_C est le coefficient cherché de compressibilité du liquide, β_A, le coefficient de compressibilité pour le matériau du récipient, V, le volume de la cavité interne du récipient.

Par conséquent, l'on ne peut négliger le changement de volume du récipient que dans le cas où $\beta_A \ll \beta_C$.

Par exemple, pour le verre on a

$$\beta_A = 0{,}25 \cdot 10^{-5}\ \text{atm}^{-1}.$$

Le coefficient de compressibilité pour les liquides varie dans de très grands intervalles et a les valeurs suivantes:

mercure	$0{,}38 \cdot 10^{-5}$ atm^{-1},
eau	$5{,}0 \cdot 10^{-5}$ atm^{-1},
alcool	$7{,}6 \cdot 10^{-5}$ atm^{-1},
éther	$14{,}5 \cdot 10^{-5}$ atm^{-1}.

Par conséquent, la correction β_A a une importance considérable pour les liquides peu compressibles.

97. La seconde barre supportera une sollicitation plus grande. En effet, la destruction de la barre sera précédée, dans le premier cas, par la formation d'un collet, et la rupture aura lieu pour une aire sensiblement réduite de la section transversale dans la zone de destruction. Dans le second cas, par contre, le collet ne se formera pas ou presque puisque les parties épaisses gêneront le cisaillement suivant des plans inclinés par rapport à l'axe de la barre. La destruction aura lieu sans rétrécissement de la section transversale.

Si le matériau dont sont faits les échantillons n'était pas plastique mais cassant, le premier échantillon ne serait pas alors plus fragile que le second et serait même plus résistant pour certains matériaux très sensibles aux contraintes locales.

98. Pour réaliser un cisaillement pur homogène, c'est-à-dire un cisaillement sous lequel les contraintes restent constantes dans tous les points d'un solide, l'on peut proposer les procédés suivants:

1) La torsion d'un tube mince droit (pas nécessairement de forme ronde) ayant une épaisseur constante des parois (fig. 318, *a*).

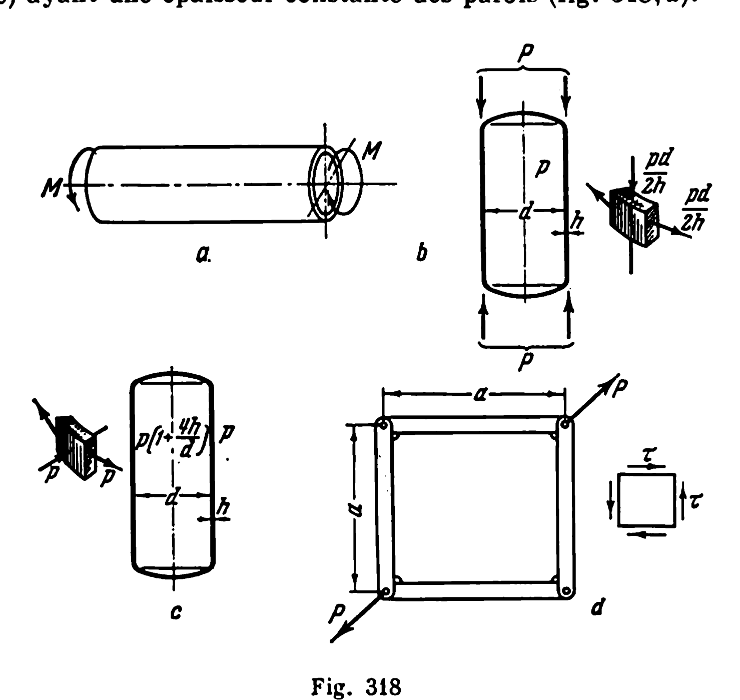


Fig. 318

2) La soumission d'un cylindre aux parois minces à une sollicitation sous forme de pression interne p agissant simultanément avec une compression axiale par une force $P = 0,75p\pi d^2$. Avec cela, à une distance suffisamment éloignée des extrémités, les contraintes axiales de compression seront égales aux contraintes tangentielles de traction (fig. 318, *b*).

3) La soumission d'un cylindre aux parois minces à une sollicitation sous forme de pressions externe p et interne $p\left(1+\frac{4h}{d}\right)$ (fig. 318, c). Les parois d'un tel cylindre seront comprimées selon la normale à la surface médiane par une contrainte p et soumises à une traction tangentielle par une contrainte identique. Le cylindre ne connaîtra pas de traction dans une direction parallèle à l'axe.

4) La soumission d'un parallélogramme articulé comportant une plaque fixée à l'intérieur, à une traction à l'aide de forces dirigées selon les diagonales P. Pour des éléments relativement rigides du parallélogramme, on a

$$\tau=\frac{P}{ah\sqrt{2}},$$

h étant l'épaisseur de la plaque (fig. 318, d).

Dans les zones situées au voisinage des extrémités, l'état de contrainte dans tous les cas énumérés sera, dans les conditions réelles, quelque peu différent du cisaillement pur.

Un cisaillement pur non homogène, c'est-à-dire sous lequel la valeur des contraintes ne sera pas la même pour tous les points du solide, se réalise, par exemple, lors de la torsion d'une barre prismatique ayant une forme arbitraire de section transversale ou, lors de la soumission d'un tube très épais à une sollicitation sous forme de pression interne p (fig. 319).

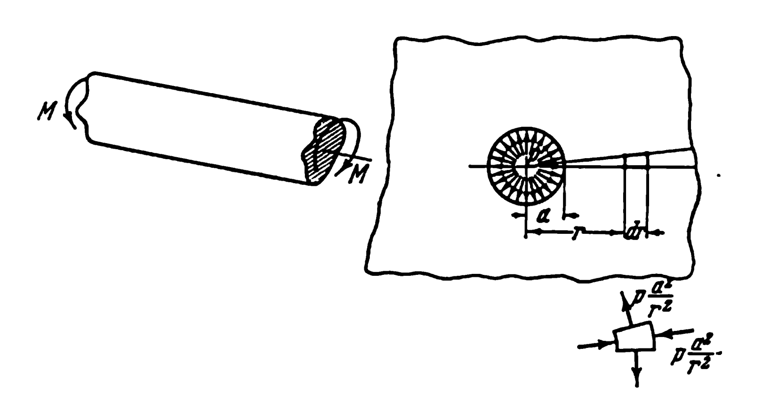


Fig. 319

99. Le seul procédé connu à l'heure actuelle pour réaliser une traction uniformément répartie de tous côtés est le suivant:

Un globe homogène, plein, préalablement refroidi, est soumis à un échauffement rapide. Dans ces conditions, on aura au centre du globe l'état de contrainte en question. Pour étudier les propriétés d'un matériau dans cet état de contrainte, par exemple pour

déterminer la caractéristique appelée caractéristique d'arrachement, ce procédé n'est malheureusement pas utilisable.

Une traction de tous côtés (mais non uniforme) apparaît dans la partie centrale d'un échantillon : la zone de la gorge d'un échantillon cylindrique se trouvant en traction (fig. 320) *).

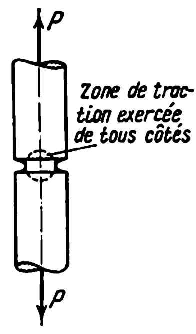


Fig. 320

100. Ce phénomène est plus facile à expliquer en partant des positions de la théorie de résistance.

Complétons la sollicitation externe agissant sur la barre avant la soumission de cette dernière à une compression de tous côtés (fig. 321), en ajoutant et en retranchant des efforts axiaux pF (F est l'aire de la section de l'échantillon). D'après la théorie des contraintes tangentielles maximales et la théorie énergétique, une pression exercée de tous côtés n'aura pas d'influence sur l'apparition des déformations plastiques. La traction axiale, quant à elle, donne une rupture avec formation du collet.

Ce phénomène peut aussi être expliqué en partant des positions de la stabilité des formes d'équilibre. Si pour l'une ou l'autre raison on observe un rétrécissement local d'une barre, il y aura une force axiale de traction égale au produit de la pression par la différence entre les aires $F_1 - F_2$, où F_1 est l'aire de la section transversale de la barre dans une zone éloignée du rétrécissement local ; F_2, l'aire de la section transversale dans l'endroit du rétrécissement. L'apparition d'une force de traction conduit au développement ultérieur du collet, provoquant à son tour une augmentation de la force de traction suivie de la rupture.

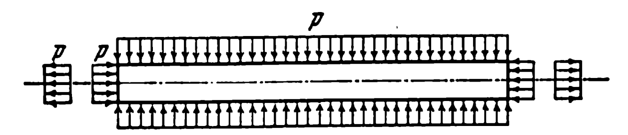


Fig. 321

101. Les observations faites ne peuvent pas servir de raison pour nourrir des doutes quant à la véracité de la solution.

La courbe de traction (fig. 94,*a*) a été obtenue pour le cas d'un état de contrainte monoaxial. Par contre, dans la zone de la gorge, à l'exception des points situés près de la surface, l'état de contrainte est triaxial. Les contraintes tangentielle et radiale sont des contraintes de traction. C'est la raison pour laquelle la contrainte axiale atteint ici des valeurs plus grandes que σ_{el}.

*) L'on suppose que le rayon du contour de la gorge est commensurable avec le diamètre de l'échantillon.

102. Les points A et B (fig. 322) situés sur le contour de l'orifice.

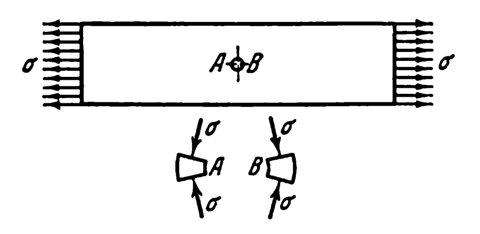


Fig. 322

103. Lors de la résolution de ce problème, la combinaison des données citées plus haut relatives aux contraintes locales respectivement pour les forces et pour les moments, ne conduit pas à un résultat positif et il faut donc s'y prendre de la manière suivante.

Examinons, pour commencer, l'état de contrainte des points du cylindre éloignés de l'orifice (rectangle $abdc$, fig. 323, a). De toute

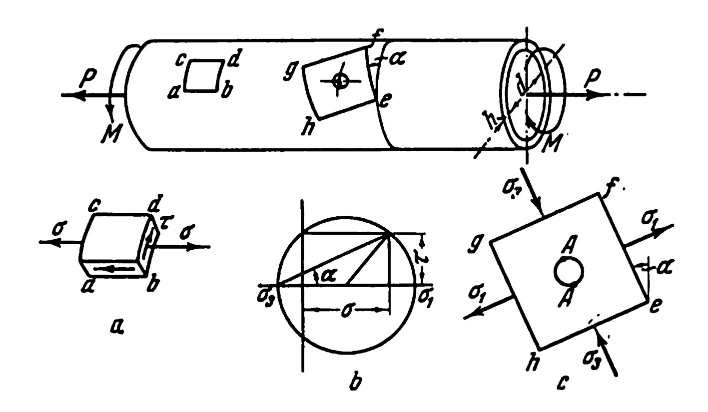


Fig. 323

évidence, $\tau = \frac{2M}{\pi d^2 h}$, $\sigma = \frac{P}{\pi dh}$. Les contraintes principales σ_1 et σ_3 s'obtiennent de la formule suivante

$$\sigma_{1\,;\,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

La surface dans laquelle agit la contrainte maximale σ_1 est inclinée sous un angle α par rapport à l'arc du cercle normal. D'après les propriétés de l'état de contrainte bidimensionnel (voir fig. 323, b), cet angle se détermine de la relation $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{4M}{Pd}$.

Maintenant à l'aide des plans principaux, prélevons du tube un tronçon *efgh* comprenant l'orifice en question ainsi que la zone des contraintes locales avoisinante à ce dernier (fig. 323, *c*). D'après les données dispensées dans des guides *), nous aurons pour un tel type de sollicitation d'une plaque perforée $\sigma_{max} = 3\sigma' - \sigma''$, σ' étant la plus grande et σ'', la plus petite des contraintes considérées. Dans notre cas,

$$\sigma' = \sigma_1, \quad \sigma'' = \sigma_3, \quad \sigma_{max} = \sigma + 2\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Cette contrainte apparaît aux bords de l'ouverture aux extrémités du diamètre parallèle à l'axe *3* (les points *A*, fig. 323, *c*).

104. Ce problème se rapporte aux problèmes les plus simples de la théorie des déformations plastiques restreintes. Pour sa résolution, il est indispensable avant tout de transformer la courbe $\sigma = f(\varepsilon)$ en $\tau = \varphi(\gamma)$.

Conformément à la théorie de la plasticité, entre l'intensité des contraintes

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2}$$

et l'intensité des déformations

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}$$

existe, pour un matériau donné, une dépendance fonctionnelle déterminée

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i), \tag{1}$$

invariable pour tous les états de contrainte. En particulier pour la traction, quand

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_i = \sigma,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \mu\varepsilon, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \mu)\varepsilon.$$

Si l'on pose $\mu = 0{,}5$, $\varepsilon_i = \varepsilon$. En torsion,

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau, \quad \sigma_i = \sqrt{3}\tau,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma}{2}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\gamma}{2}, \quad \varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}.$$

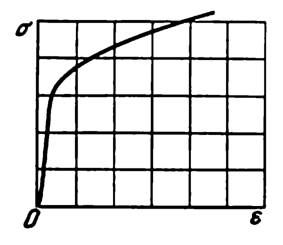
Or, d'après l'expression (1),

$$\sigma = \Phi(\varepsilon), \quad \tau\sqrt{3} = \Phi\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}\right).$$

*) Une enveloppe cylindrique peut être considérée, dans la zone de l'orifice, comme une plaque si $\rho^2/\sqrt{Rh} < 0{,}1$, ρ étant le rayon de l'orifice, R, le rayon du cylindre et h, son épaisseur.

La première de ces équations est l'équation de la courbe de traction du matériau. Par conséquent, la transformation de cette courbe se fera à l'aide d'une simple substitution de $\tau\sqrt{3}$ à σ et de $\gamma/\sqrt{3}$ à ε.

Sur la fig. 324 on a montré un exemple d'une telle transformation de la courbe. L'angle de torsion θ en fonction du moment M se détermine tout comme la variation de la courbure dans le problème 83.



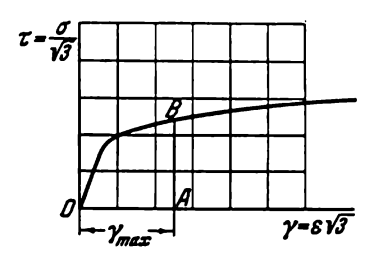


Fig. 324

L'angle de cisaillement γ à une distance ρ de l'axe de la poutre sera

$$\gamma = \rho\theta, \quad \gamma_{max} = \frac{d}{2}\theta, \tag{2}$$

d étant le diamètre de la section. Le moment de torsion est égal à

$$M = 2\pi \int_0^{d/2} \tau\rho^2\, d\rho\,;$$

or, comme la distance $\rho = \frac{d}{2}\frac{\gamma}{\gamma_{max}}$, on aura

$$M = \frac{\pi d^3}{4\gamma_{max}^3} \int_0^{\gamma_{max}} \tau\gamma^2\, d\gamma. \tag{3}$$

L'intégrale figurant dans cette expression est le moment d'inertie du triangle curviligne OAB par rapport à l'axe des ordonnées (fig. 324). Ainsi, la détermination de la dépendance cherchée se fait de la manière suivante. S'étant fixé la valeur de γ_{max}, déterminons le moment d'inertie du triangle OAB. Ensuite, d'après les formules (2) et (3), déterminons θ et M. En effectuant cette opération pour un certain nombre de valeurs de γ_{max}, on peut construire la fonction cherchée.

IV. STABILITÉ

105. La longueur de la partie supérieure libre de la barre est égale à

$$l-\lambda=l-\frac{P}{c}.$$

Pour cette partie, l'existence d'une forme d'équilibre avec un axe curviligne est possible si

$$P>\frac{\pi^2 EJ}{4\left(l-\frac{P}{c}\right)^2},$$

tandis que pour la partie inférieure de longueur $\lambda = P/c$, pour

$$P>\frac{4\pi^2 EJ}{\left(\frac{P}{c}\right)^2}.$$

Désignons

$$\frac{\lambda}{l}=\frac{P}{cl}=p, \qquad \frac{\pi^2 EJ}{l^3 c}=p_0.$$

Les conditions d'existence des formes curvilignes d'équilibre données plus haut prendront alors la forme suivante

$$\begin{gathered} p(1-p)^2>\frac{1}{4}p_0, \\ p^3>4p_0. \end{gathered} \tag{1}$$

Comme $\lambda \leqslant l$, on aura $0 \leqslant p \leqslant 1$. Construisons sur cet intervalle de variation de p la courbe des fonctions $p(1-p)^2$ et p^3 (fig. 325). De cette courbe et des relations (1) on voit que pour assurer que la barre reste stable, il faut satisfaire les conditions suivantes:

$$\frac{1}{4}p_0>\frac{4}{27} \quad \text{et} \quad 4p_0>1,$$

de là

$$p_0>\frac{16}{27}.$$

Or, plus haut on a établi que

$$p_0=\frac{\pi^2 EJ}{l^3 c};$$

ainsi, la rigidité du ressort c doit être plus petite que la grandeur suivante:

$$\frac{27}{16}\,\frac{\pi^2 EJ}{l^3}.$$

106. Examinons le contour d'une plaque en flexion (fig. 326).

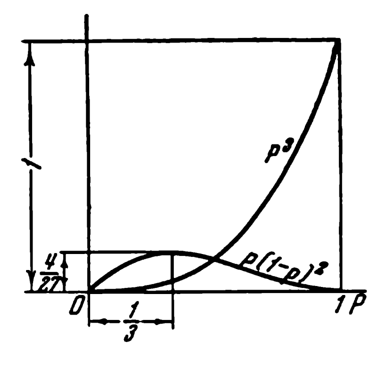


Fig. 325

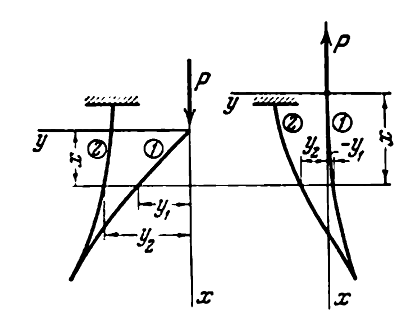


Fig. 326

Les équations différentielles de la déformée pour la première et la deuxième partie de la plaque seront, pour une force P dirigée en bas:

$$EJy_1''+Py_1=0,$$

$$EJy_2''-Py_2=0.$$

En désignant $\frac{P}{EJ}=\alpha^2$, nous obtenons

$$y_1''+\alpha^2 y_1=0,\quad y_2''-\alpha^2 y_2=0,$$

d'où

$$y_1=A_1\sin\alpha x+B_1\cos\alpha x,$$

$$y_2=A_2\,\mathrm{sh}\,\alpha x+B_2\,\mathrm{ch}\,\alpha x.$$

Les constantes se déterminent des conditions suivantes:

1) pour $x=0$ $\quad y_1=0,$
2) pour $x=l$ $\quad y_1=y_2,$
3) pour $x=l$ $\quad y_1'=y_2',$
4) pour $x=0$ $\quad y_2'=0.$

De la première et de la dernière condition, nous obtenons

$$B_1=A_2=0,$$

de la seconde et de la troisième,

$$A_1 \sin \alpha l = B_2 \operatorname{ch} \alpha l,$$
$$A_1 \cos \alpha l = B_2 \operatorname{sh} \alpha l,$$

d'où il découle que

$$\operatorname{tg} \alpha l \operatorname{th} \alpha l = 1 \tag{1}$$

ou

$$\alpha l = 0{,}938, \quad P_{cr} = \frac{0{,}88EJ}{l^2}.$$

Si la force P est dirigée en haut, le signe devant α^2 se transforme en son inverse et l'équation transcendante (1) prend la forme suivante:

$$\operatorname{tg} i\alpha l \operatorname{th} i\alpha l = 1.$$

Or, $\operatorname{tg} i\alpha l = -\frac{\operatorname{th} \alpha l}{i}$, tandis que $\operatorname{th} i\alpha l = i \operatorname{tg} \alpha l$. C'est pourquoi nous aurons

$$\operatorname{tg} \alpha l \operatorname{th} \alpha l = -1,$$

de là

$$\alpha l = 2{,}35, \quad P_{cr} = \frac{5{,}53EJ}{l^2}.$$

107. Considérons une barre incurvée après l'avoir débarrassée de l'appui supérieur (fig. 327). Désignons par P_1 la réaction verticale de cet appui et par Q sa réaction horizontale.

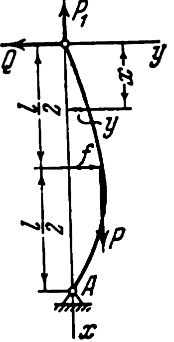


Fig. 327

La première question à se poser ici est une question concernant la valeur de ces réactions. La force Q se détermine de la nullité des moments par rapport au point A, ce qui donne

$$Q = P\frac{f}{l}.$$

Avant le commencement de l'incurvation, la force $P_1 = P/2$. Comme la déviation par rapport à la forme rectiligne peut être prise aussi petite qu'on veut, on peut supposer que sous l'incurvation la force P_1 soit égale à $P/2$ (voir solution du problème 109). Etablissons maintenant les équations différentielles de l'axe incurvé par parties:

$$EJy_1'' = P_1 y_1 - Qx \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right),$$
$$EJy_2'' = P_1 y_2 - Qx - P(y_2 - f) \quad \left(\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l\right),$$

ou, autrement,

$$y_1'' - \alpha^2 y_1 = -2\alpha^2 \frac{f}{l} x,$$
$$y_2'' + \alpha^2 y_2 = -2\alpha^2 \frac{f}{l} x + 2\alpha^2 f,$$

avec

$$\alpha^2 = \frac{P}{2EJ}.$$

Résolvant ces équations, nous obtenons

$$y_1 = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x + \frac{2f}{l} x,$$

$$y_2 = C \sin \alpha x + D \cos \alpha x - \frac{2f}{l} x + 2f.$$

Pour $x = 0$, $y_1 = 0$,
pour $x = l/2$, $y_1 = y_2 = f$ et $y_1' = y_2'$,
pour $x = l$, $y_2 = 0$.

Par conséquent,

1) $B = 0$,

2) $A \operatorname{sh} \frac{\alpha l}{2} + B \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2} + f = f$,

3) $C \sin \frac{\alpha l}{2} + D \cos \frac{\alpha l}{2} + f = f$,

4) $A\alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2} + B\alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha l}{2} + \frac{2f}{l} = C\alpha \cos \frac{\alpha l}{2} - D\alpha \sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{2f}{l}$,

5) $C \sin \alpha l + D \cos \alpha l = 0$.

De l'équation 2) il découle que $A = 0$ (i.e., la partie supérieure de la barre ne connaîtra pas d'incurvation). Les trois dernières équations prennent la forme suivante :

$$C \sin \frac{\alpha l}{2} + D \cos \frac{\alpha l}{2} = 0,$$

$$C\alpha \cos \frac{\alpha l}{2} - D\alpha \sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{4f}{l} = 0,$$

$$C \sin \alpha l + D \cos \alpha l = 0.$$

Dans le cas où le déterminant de ce système n'est pas nul, toutes les constantes C, D, f sont égales à zéro. On aura alors $y_1 = y_2 = 0$ et la barre reste rectiligne. La solution peut être non nulle si le déterminant n'est pas égal à zéro. Cela donne la possibilité de trouver la force critique P :

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{\alpha l}{2} & \cos \frac{\alpha l}{2} & 0 \\ \alpha \cos \frac{\alpha l}{2} & -\alpha \sin \frac{\alpha l}{2} & -\frac{4}{l} \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de là,

$$\sin \frac{\alpha l}{2} = 0, \quad \frac{\alpha l}{2} = \pi, \quad P_{\text{cr}} = \frac{8\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Si l'extrémité supérieure de la barre avait la possibilité de se déplacer selon la verticale, la force critique serait un peu plus de quatre fois moindre : $18{,}7EJ/l^2$.

108. Mentalement, enlevons du boulon l'écrou et considérons les efforts agissant sur le boulon et sur le tube. Sur la fig. 328 sont représentés les axes du boulon et du tube après le flambement de même que les efforts internes P, Q et M_0. De toute évidence, on aura pour le tube

$$M_{f1} = Py_1 - Qx - M_0,$$

et pour le boulon

$$M_{f1} = -Py_2 + Qx + M_0.$$

Les équations différentielles des déformées du tube et du boulon seront :

$$E_1J_1y_1'' + Py_1 = Qx + M_0,$$
$$E_2J_2y_2'' - Py_2 = -Qx - M_0.$$

Fig. 328

Introduisons les notations suivantes :

$$\frac{P}{E_1J_1} = \alpha_1^2, \quad \frac{P}{E_2J_2} = \alpha_2^2,$$

nous aurons alors

$$y_1'' + \alpha_1^2 y_1 = \frac{Q}{P}\alpha_1^2 x + \frac{M_0}{P}\alpha_1^2,$$

$$y_2'' - \alpha_2^2 y_2 = -\frac{Q}{P}\alpha_2^2 x - \frac{M_0}{P}\alpha_2^2.$$

Résolvant ces équations, nous obtenons :

$$y_1 = A_1 \sin \alpha_1 x + B_1 \cos \alpha_1 x + \frac{Q}{P}x + \frac{M_0}{P},$$

$$y_2 = A_2 \operatorname{sh} \alpha_2 x + B_2 \operatorname{ch} \alpha_2 x + \frac{Q}{P}x + \frac{M_0}{P}.$$

Les deux derniers termes dans les deux expressions ne sont rien d'autre que les solutions particulières des équations. Les constantes A_1, B_1, A_2, B_2, Q et M_0 se déterminent des conditions suivantes : pour $x = 0$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_1' = y_2',$$

pour $x = l$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_1' = y_2'.$$

Des trois premières conditions, trouvons

$$B_1 = B_2 = -\frac{M_0}{P}, \quad A_2 = A_1\frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{1}$$

Les trois dernières conditions donnent

$$A_1 \sin \alpha_1 l + B_1 \cos \alpha_1 l + \frac{Q}{P} l + \frac{M_0}{P} = 0,$$

$$A_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l + B_2 \operatorname{ch} \alpha_2 l + \frac{Q}{P} l + \frac{M_0}{P} = 0,$$

$$A_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 l - B_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 l = A_2 \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_2 l + B_2 \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l.$$

Mettons dans ces équations les expressions de B_1, B_2 et A_2 tirées de (1). On aura

$$A_1 \sin \alpha_1 l + \frac{Q}{P} l + \frac{M_0}{P} (1 - \cos \alpha_1 l) = 0,$$

$$A_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \operatorname{sh} \alpha_2 l + \frac{Q}{P} l + \frac{M_0}{P} (1 - \operatorname{ch} \alpha_2 l) = 0,$$

$$A_1 \alpha_1 (\cos \alpha_1 l - \operatorname{ch} \alpha_2 l) + \frac{M_0}{P} (\alpha_1 \sin \alpha_1 l + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l) = 0.$$

Egalant à zéro le déterminant du système, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha_1 l & l & 1 - \cos \alpha_1 l \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \operatorname{sh} \alpha_2 l & l & 1 - \operatorname{ch} \alpha_2 l \\ \alpha_1 (\cos \alpha_1 l - \operatorname{ch} \alpha_2 l) & 0 & \alpha_1 \sin \alpha_1 l + \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l \end{vmatrix} = 0,$$

de là

$$2 z_1 z_2 (\operatorname{ch} z_2 \cos z_1 - 1) = (z_2^2 - z_1^2) \operatorname{sh} z_2 \sin z_1, \tag{2}$$

avec $z_1 = \alpha_1 l$, $z_2 = \alpha_2 l$. Pour un rapport donné des rigidités, on peut exprimer z_2 par z_1 et, ensuite, en résolvant l'équation transcendante (2), déterminer la force critique P de serrage.

En particulier, pour $E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ$, nous aurons $z_1 = z_2 = z$ et, dans ce cas, $\operatorname{ch} z \cos z = 1$, d'où

$$z = 4{,}73, \quad P_{cr} = \frac{z^2 EJ}{l^2} = \frac{22{,}4 EJ}{l^2}.$$

109. On peut affirmer que la forme de la déformée d'une barre incurvée sera, sous une force de compression donnée, la même et ce indépendamment des causes qui ont créé cette force de compression.

Pour une déviation donnée de la barre par rapport à la position rectiligne, la force qui comprime la barre doit, dans tous les cas, être la même. Réduisant de façon illimitée la courbure de la barre, nous en arrivons infailliblement à cette conclusion-ci que pour la barre étudiée la force critique sera la même dans le cas ordinaire quand la barre est sollicitée par un poids mort tout comme dans le cas présent, où il s'agit d'une action thermique.

On peut aussi raisonner de la manière suivante. Le moment fléchissant dans la barre est proportionnel à la première puissance de la flèche y, tandis que le changement de la force de compression a lieu lors d'un déplacement vertical proportionnel à la seconde puissance de la grandeur y'. Par conséquent, la valeur de y peut toujours être

choisie suffisamment petite pour que l'on puisse se permettre de ne pas prendre en considération le changement de la force.

110. Une approche formelle au problème du choix de la fonction d'approximation peut donner un résultat fort loin de la réalité.

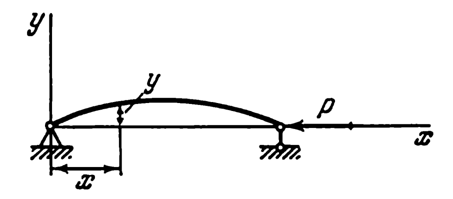


Fig. 329

Ainsi, par exemple, supposons que la forme de la déformée d'une barre aux appuis articulés soumise à la compression (fig. 329) est donnée par la fonction suivante :

$$y = A\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{l}{m}\sin\frac{\pi m x}{l}\right). \qquad (1)$$

Pour $m \to \infty$ la fonction adoptée se rapproche de façon illimitée de la valeur exacte de la fonction qui exprime la forme de la déformée, c'est-à-dire

$$y_{m\to\infty} = A\sin\frac{\pi x}{l}.$$

La force critique P calculée à partir de cette fonction au moyen de la méthode énergétique s'avère égale à :

$$P_{cr} = \frac{EJ\int_0^l y''^2\,dx}{\int_0^l y'^2\,dx} = \frac{1+m^2}{2}\,\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

et, pour $m \to \infty$, comme on le voit, s'éloigne indéfiniment de la valeur exacte.

La particularité de la fonction (1) réside en ceci qu'elle reflète bien la forme primitive de la fonction y, mais diverge nettement d'elle pour ce qui est la seconde dérivée, c'est-à-dire par rapport à l'expression qui donne la courbure.

Cet exemple est instructif en ceci qu'il permet de mettre en relief une règle générale : quand on choisit la fonction d'approximation, il est indispensable de veiller aussi au degré d'approximation de ses dérivées, y compris sa dérivée supérieure figurant dans l'expression de l'énergie.

111. Résolvons d'abord un problème auxiliaire.

Soit une barre aux appuis articulés, de longueur l, sollicitée par une force de compression N et des moments M_0 et M_1 (fig. 330, *a*).

L'équation différentielle de la déformée de la barre sera

$$EJy'' = M_0 - Rx - Ny,$$

R étant la réaction des appuis. Nous obtenons ensuite

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \frac{1}{EJ\alpha^2}(M_0 - Rx), \tag{1}$$

avec $\alpha^2 = N/EJ$.

De toute évidence, pour $x = 0$ et pour $x = l$, le déplacement $y = 0$. Supposons en outre que pour $x = 0$, $y' = 0$. Se servant de

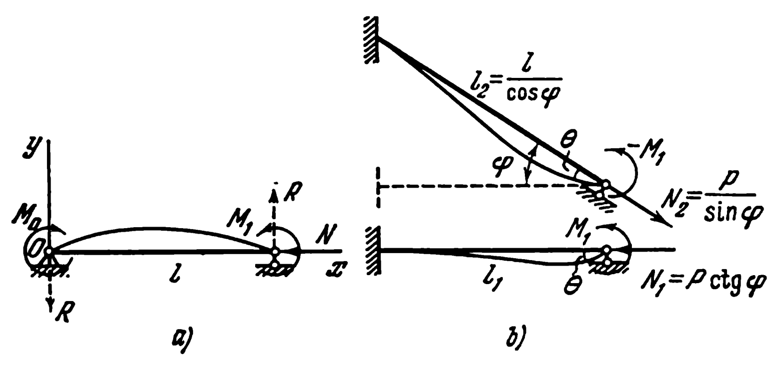


Fig. 330

ces conditions et tenant compte du fait que

$$R = \frac{M_0 - M_1}{l},$$

excluons de l'expression (1) les grandeurs A, B, M_0 et R. Nous aurons alors

$$y = \frac{M_1}{EJ\alpha^2}\,\frac{(1-\cos\alpha l)(\alpha l - \sin\alpha l)}{\alpha l\cos\alpha l - \sin\alpha l}\left[\frac{1-\cos\alpha x}{1-\cos\alpha l} - \frac{\alpha x - \sin\alpha x}{\alpha l - \sin\alpha l}\right].$$

La valeur du moment M_1 reste indéterminée.

L'angle de rotation de la barre à l'appui de droite sera égal à

$$\theta = y'_{x=l} = \frac{M_1}{EJ\alpha}\,\frac{-2+2\cos\alpha l + \alpha l\sin\alpha l}{\alpha l\cos\alpha l - \sin\alpha l}. \tag{2}$$

Si l'effort N n'est pas un effort de compression mais de traction, il faut remplacer α par $i\alpha$, $\cos\alpha l$ par $\mathrm{ch}\,\alpha l$, $\sin\alpha l$ par $i\,\mathrm{sh}\,\alpha l$. L'expression (2) prendra alors la forme suivante

$$\theta = -\frac{M_1}{EJ\alpha}\,\frac{-2+2\,\mathrm{ch}\,\alpha l - \alpha l\,\mathrm{sh}\,\alpha l}{\alpha l\,\mathrm{ch}\,\alpha l - \mathrm{sh}\,\alpha l}. \tag{3}$$

Revenons maintenant au système de barres en question (fig. 330, *b*). La barre horizontale inférieure est comprimée par une force $N_1 = P\cot\varphi$, tandis que la barre supérieure est étirée par une force $N_2 = P/\sin\varphi$.

Dans le point d'application de la force P, les déplacements de l'une et l'autre barre sont, à une valeur d'un ordre supérieur de petitesse près, égaux à zéro. Les extrémités gauches des barres sont encastrées. Par conséquent, le schéma d'une barre encastrée et articulée (fig. 330, a) correspond aux conditions d'ancrage et de chargement des barres qui composent le portique en question. Il ne reste qu'à satisfaire aux conditions de jonction. Ces conditions se ramènent à l'égalité des angles θ ainsi qu'à l'égalité des moments dans le point commun.

Recourons aux expressions (2) et (3). Remplaçons αl par $\alpha_1 l_1$ dans la première de ces expressions et par $\alpha_2 l_2$ dans la seconde. De toute évidence,

$$\alpha_1 l_1 = l\sqrt{\frac{P \operatorname{cotg} \varphi}{EJ}}, \quad \alpha_2 l_2 = \frac{l}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{P}{EJ \sin\varphi}}. \tag{4}$$

Comme dans le point de raccordement les moments sont dirigés à la rencontre l'un de l'autre, dans l'une des expressions (2) ou (3), le signe précédant M_1 doit être remplacé par le signe inverse. Egalant les angles θ, nous obtenons l'équation transcendante suivante :

$$\frac{1}{\alpha_1 l_1}\,\frac{-2+2\cos\alpha_1 l_1+\alpha_1 l_1 \sin\alpha_1 l_1}{\alpha_1 l_1 \cos\alpha_1 l_1-\sin\alpha_1 l_1}=\frac{1}{\alpha_2 l_2 \cos\varphi}\,\frac{-2+2\operatorname{ch}\alpha_2 l_2-\alpha_2 l_2 \operatorname{sh}\alpha_2 l_2}{\alpha_2 l_2 \operatorname{ch}\alpha_2 l_2-\operatorname{sh}\alpha_2 l_2}.$$

A cette équation s'ajoute la relation suivante

$$\alpha_1 l_1 = \alpha_2 l_2 \cos^{3/2}\varphi.$$

En déterminant pour quelques valeurs de φ la grandeur $\alpha_1 l_1 = \sqrt{\frac{Pl^2}{EJ}\operatorname{cotg}\varphi}$, nous obtenons le tableau suivant :

φ^0	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\frac{P_{cr} l^2}{EJ}$	0	5,55	11,46	18,21	26,57	38,08	56,18	91,37	196,9	∞

112. Supposons que le point A est sorti du plan $BCDE$. Appliquons sur les poutres BD et CE dans le point A des efforts P_1 (fig. 331), après quoi nous considérons chaque poutre isolément. L'équation différentielle de la flexion de la poutre BD sera :

$$EJy'' - Py = -\frac{1}{2}P_1 x.$$

Pour la poutre CE, nous avons

$$EJy'' + Py = +\frac{1}{2}P_1 x.$$

Les solutions de ces équations seront respectivement :

$$y_1 = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + \frac{1}{2} \frac{P_1}{P} x,$$

$$y_2 = C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x + \frac{1}{2} \frac{P_1}{P} x,$$

avec

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Dans le point $x = 0$ la flèche y devient nulle pour les deux cas. C'est pourquoi

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Pour des formes symétriques de flambement, pour $x = l$, l'angle

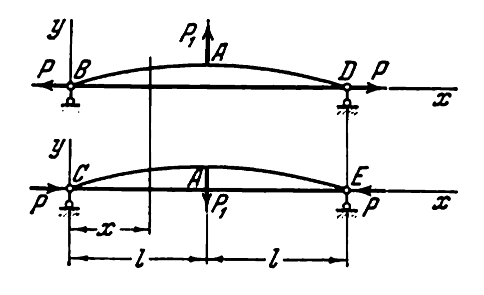


Fig. 331

d'inclinaison $y' = 0$; de là,

$$C_1 = -\frac{P_1}{2P\alpha} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha l}, \quad C_3 = -\frac{P_1}{2P\alpha} \frac{1}{\cos \alpha l}.$$

Enfin, de la condition d'égalité des flèches des poutres dans le point A, nous obtenons

$$C_1 \operatorname{sh} \alpha l = C_3 \sin \alpha l,$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\operatorname{th} \alpha l = \operatorname{tg} \alpha l,$$

d'où

$$\alpha l = 3{,}926, \qquad P_{cr} = \frac{15{,}4EJ}{l^2}. \tag{1}$$

Outre cela, il existe une seconde forme de flambement de la barre CE comprimée. Cette barre peut s'incurver selon deux demi-ondes

avec pour point immobile le point A. Alors la barre BD va se tordre. Considérons les deux barres isolément (fig. 332). L'équation diffé-

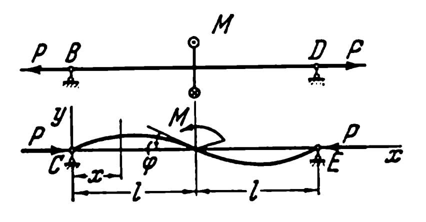


Fig. 332

rentielle de l'axe incurvé de la barre CE sera

$$EJy'' + Py = \frac{M}{2l}x,$$

d'où

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \frac{M}{2Pl}x;$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pour} & x=0 & y=0, \\ \text{»} & x=l & y=0, \\ \text{»} & x=l & y'=-\varphi, \end{array}\right\} \tag{2}$$

φ étant l'angle de rotation de la section médiane de la barre BD égal à

$$\varphi = \frac{M}{2}\frac{l}{c},$$

où c est la rigidité en torsion d'une barre mince soumise à la traction ; d'après la solution du problème 29, nous avons

$$c = \frac{1}{3}Gbh^3 + \frac{Pb^2}{12}.$$

Les conditions aux limites (2) donnent

$$C_2 = 0, \; C_1 \sin \alpha l + \frac{M}{2P} = 0,$$

$$C_1 \alpha \cos \alpha l + \frac{M}{2Pl} = -\frac{M}{2}\frac{1}{\frac{1}{3}Gbh^3 + \frac{Pb^2}{12}},$$

de là, en égalant à zéro le déterminant du système, nous obtenons

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \alpha l = \frac{\frac{1}{P}}{\frac{1}{Pl} + \frac{l}{\frac{1}{3}Gbh^3 + \frac{Pb^2}{12}}}.$$

Puisque

$$P=\alpha^2EJ,\ G=\frac{E}{2(1+\mu)},$$
$$J=\frac{bh^3}{12},$$

on aura

$$\operatorname{tg}\alpha l=\alpha l\frac{\frac{2}{1+\mu}+\frac{b^2}{12l^2}\alpha^2l^2}{\frac{2}{1+\mu}+\alpha^2l^2\left(\frac{b^2}{12l^2}+1\right)}.$$

Comme b est beaucoup plus petit que l, tandis que αl doit avoir une valeur de l'ordre de 3 à 4 unités, on peut, de toute évidence, négliger dans le deuxième membre de l'équation les termes contenant b^2; nous obtenons alors

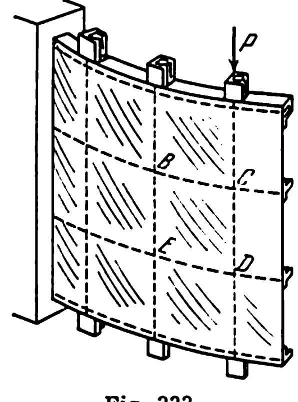


Fig. 333

$$\operatorname{tg}\alpha l=\frac{2\alpha l}{2+(1+\mu)\alpha^2l^2}.$$

Pour $\mu=0,3$

$$\alpha l=3,51,\ P_{\text{cr}}=\frac{12,3EJ}{l^2}. \qquad (3)$$

Cette valeur de P_{cr} est plus petite que celle calculée plus haut (1). Le flambement de la barre CE se produira, par conséquent, selon deux demi-ondes.

Avec l'augmentation de la force P, l'effort agissant dans la barre comprimée reste presque inchangée, et la plus grande partie de la charge va être supportée par la diagonale BC en traction.

Le système étudié dans ce problème est le modèle d'un panneau aux parois minces $BCDE$ (fig. 333) se trouvant dans des conditions qui occasionnent le cisaillement. Les éléments de ce genre sont typiques pour les structures des avions et des fusées. En flambement, on assiste à une formation d'ondes selon les diagonales: après avoir perdu la possibilité de supporter une charge supplémentaire de compression selon la diagonale CE, le panneau peut bien supporter les efforts de traction agissant dans une direction perpendiculaire.

113. Etablissons l'équation différentielle de l'axe incurvé de la barre en supposant que les déplacements sont petits.

Introduisons un système de coordonnées x, y, z (fig. 334). Dans la section x les moments fléchissants dus à l'action de la force P et du moment M seront:

dans le plan xy: Py et Mz',

dans le plan xz: Pz et $-My'$.

Le signe « plus » ou « moins » à placer devant le moment est choisi en fonction de ceci si le moment est dirigé dans le sens de l'augmentation ou dans celui de la diminution de la courbure positive dans le plan de flexion correspondant.

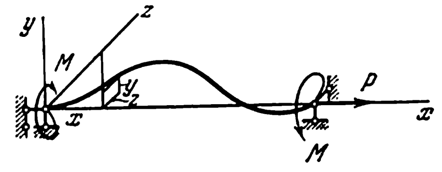


Fig. 334

Si l'on suppose que les rigidités en flexion dans les plans xy et xz sont identiques, on sera en mesure d'écrire les équations de la déformée dans la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} EJy'' &= Py + Mz', \\ EJz'' &= Pz - My'. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Adoptons la solution de ce système dans la forme suivante

$$y = A\cos\alpha_1 x + B\sin\alpha_1 x + C\cos\alpha_2 x + D\sin\alpha_2 x,$$
$$z = A\sin\alpha_1 x - B\cos\alpha_1 x + C\sin\alpha_2 x - D\cos\alpha_2 x,$$

ici α_1 et α_2 sont les racines de l'équation quadratique

$$\alpha^2 + \frac{M}{EJ}\alpha + \frac{P}{EJ} = 0. \tag{2}$$

Dans le cas d'une liaison articulée de la barre, nous aurons les conditions aux limites suivantes :

$$\text{pour } x = 0 \quad y = z = 0,$$
$$\text{pour } x = l \quad y = z = 0.$$

De là, nous obtenons quatre équations :

$$A + C = 0, \quad B + D = 0;$$
$$A\cos\alpha_1 l + B\sin\alpha_1 l + C\cos\alpha_2 l + D\sin\alpha_2 l = 0,$$
$$A\sin\alpha_1 l - B\cos\alpha_1 l + C\sin\alpha_2 l - D\cos\alpha_2 l = 0.$$

Egalant à zéro le déterminant de ce système, nous obtenons :

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\, l = 1$$

ou

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\, l = 0;\ 2\pi;\ 4\pi;\ \ldots$$

Or, d'après l'équation (2),

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2\sqrt{\left(\frac{M}{2EJ}\right)^2 - \frac{P}{EJ}},$$

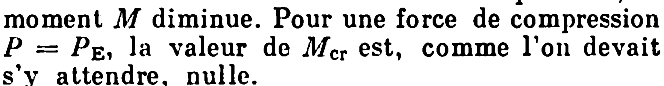
par conséquent,

$$M_{cr} = \pm 2\sqrt{EJ}\sqrt{P_E + P},$$

P_E étant la force d'Euler

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Ainsi, avec l'augmentation de la force de traction P, le moment critique augmente. Si la force P est une force de compression, le moment M diminue. Pour une force de compression $P = P_E$, la valeur de M_{cr} est, comme l'on devait s'y attendre, nulle.



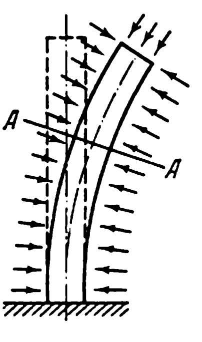


Fig. 335

114. La barre ne peut pas perdre de stabilité. En effet, supposons que pour l'une ou l'autre raison la barre se soit quelque peu incurvée (fig. 335). Dans le cas ordinaire, c'est-à-dire quand la barre n'est sollicitée que par des efforts normaux, cette incurvation sera à l'origine d'un moment fléchissant $M = Py$ qui tend à augmenter la courbure de la barre.

Sous une force suffisamment grande P, la barre (après avoir éliminé les raisons qui étaient à l'origine de l'incurvation) ne reprendra pas la forme initiale rectiligne d'équilibre. Dans ce cas, nous disons que la forme rectiligne d'équilibre de la barre est instable.

Dans le problème étudié, la situation est tout à fait autre. Les moments externes n'agissent pas sur la barre quand elle se trouve en position incurvée. La pression agissant sur un plan de la barre situé plus haut que la section AA ne crée pas de moment fléchissant et se ramène uniquement à une force normale égale à pF, agissant dans la section. C'est pour cette raison que si l'on élimine les causes qui étaient à l'origine de l'incurvation, la barre va librement recouvrir sa position initiale rectiligne, et cela avec une valeur aussi grande que l'on veut de la pression p. Ainsi, la forme rectiligne d'équilibre est toujours stable.

En guise de confirmation de ce qui vient d'être dit, on peut se référer à nos observations quotidiennes. En effet, la pression atmosphérique n'a jamais fait perdre sa forme rectiligne à un brin de paille mince aussi long et aussi peu rigide qu'il soit.

115. La barre perdra de stabilité pour une même longueur que celle pour laquelle surviendrait le flambement d'une barre verticalement dressée (fig. 336) et ayant un poids spécifique égal à la différence entre le poids du liquide et celui du bois.

Fig. 336

116. Un tube rempli de liquide va se comporter de la même façon qu'une barre dressée librement et se trouvant sous l'action de son propre poids. C'est pourquoi, si le poids total du tube et du liquide qu'il contient est plus grand que le

poids critique d'une barre de mêmes longueur et rigidité, le tube va perdre de stabilité.

117. Le système perd de stabilité de la même façon qu'il la perdrait si la force était appliquée directement sur le tube même. Dans le cas présent $P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$.

Il arrive parfois d'entendre dire que dans n'importe quelles conditions, il ne peut y avoir de flambement de la barre. Cette opinion est fondée sur une supposition erronée selon laquelle c'est la présence d'un effort interne de compression qui, dans le problème de stabilité selon Euler, joue un rôle primordial. En réalité, il n'en est pas ainsi.

Pour résoudre correctement le problème posé, il suffit de considérer le tube dans une position déviée (fig. 337). Pour le tube, l'équation différentielle de l'axe incurvé sera, comme dans le cas d'un poteau comprimé, la suivante :

$$y'' + \frac{P}{EJ} y = 0.$$

De là, dans le cas des appuis articulés aux extrémités, nous obtenons la valeur de la force critique établie plus haut.

118. D'après l'analyse faite dans le problème précédent, on peut tout de suite dire que le tube perdra de stabilité pour

$$pF = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2},$$

F étant l'aire de la partie creuse dans une section du tube.

Fig. 337

L'existence d'une pression critique pour le système en question se conçoit aussi aisément en partant des considérations énergétiques. Dans la position incurvée, le volume de la cavité interne du tube augmente de $F\lambda$ par suite du fait que, en flexion, le tube se détache du bouchon d'en haut d'une valeur égale à λ, avec

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 \, dx.$$

La force critique se détermine de la condition

$$p_{cr} F \lambda = U_{fl}.$$

Or, quand la barre est sollicitée par une force de compression, on a d'ordinaire

$$P_{cr} \lambda = U_{fl},$$

de là nous obtenons de nouveau

$$p_{cr} F = P_{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Ce cas étudié de flambement se manifeste clairement pour un soufflet à parois minces sollicité par une pression interne (fig. 338).

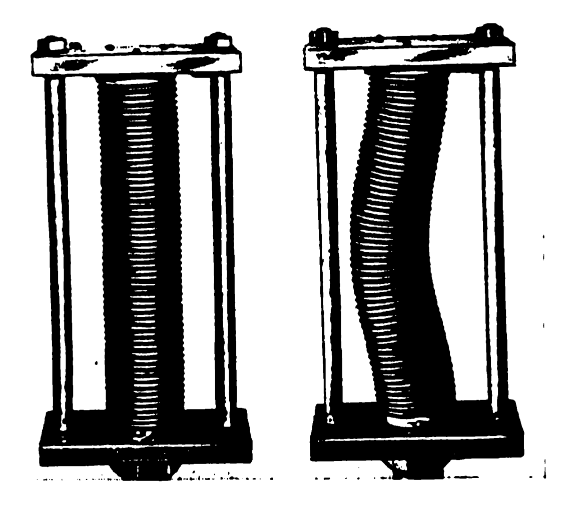


Fig. 338

La valeur de la pression critique se détermine ici tout comme dans le cas d'une barre. Seulement, à la place de la rigidité EJ, on doit prendre pour le soufflet une certaine rigidité équivalente en flexion et, à la place de F, l'aire d'une section transversale pratiquée d'après le diamètre d'au milieu.

Fig. 339

119. Supposons que pour une raison quelconque le tube se soit incurvé. Sur la fig. 339, on a montré cette incurvation, la courbure étant positive. A un moment donné, sur une partie du tube dx, se trouve une masse du liquide

$$dm = \frac{\gamma}{g} F\, dx, \qquad (1)$$

F étant l'aire de la partie creuse dans une section du tube. Pour une courbure du canal $1/\rho = d^2y/dx^2$, le liquide coulant crée, sur la partie dx, une force d'inertie

$$dm \frac{v^2}{\rho} = \frac{\gamma}{g} F\, dx v^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

dirigée du centre de la courbure. L'intensité de la force d'inertie, c'est-à-dire la force par unité de longueur de l'arc, sera :

$$q = -\frac{\gamma}{g} F v^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

On a mis le signe moins puisque la force q est, pour une courbure positive, dirigée dans le sens opposé au déplacement y. Or, l'on sait que

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=q.$$

Par conséquent,

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{\gamma}{g}Fv^2\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Désignons

$$\frac{\gamma}{g}\frac{Fv^2}{EJ}=\alpha^2.$$

Nous aurons alors

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\alpha^2\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

d'où

$$y=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x+Cx+D.$$

Pour $x = 0$ et $x = l$, nous aurons $d^2y/dx^2 = 0$ et $y = 0$. De ces conditions nous obtenons:

$$B=0,\quad C=0,\quad D=0,\quad A\sin\alpha l=0,$$

$$\alpha l=\pi,\ v_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{g}{\gamma}\frac{EJ}{F}}. \tag{2}$$

Il est assez curieux que le flambement se fait selon une sinusoïde, c'est-à-dire de la même façon que sous une compression axiale. En plus de cela, le flambement survient pour une vitesse sous laquelle la réaction du jet devient justement égale à la force critique d'Euler. Effectivement, la réaction du jet, i.e. la force de réaction du jet, est, comme on sait, égale à

$$P=\frac{dm}{dt}v,$$

dm/dt étant le débit de la masse par seconde, v, la vitesse d'écoulement. (Soit dit en passant, la poussée d'un moteur à réaction se détermine de cette formule.) Conformément à (1)

$$P=\frac{\gamma}{g}Fv^2.$$

En substituant ici à v sa valeur tirée de (2), nous obtiendrons que la force de réaction du jet est égale à la force critique d'Euler $P = \pi^2EJ/l^2$. Il ne faut cependant pas croire que le tube est soumis à la compression par la force de réaction. Le tube perd de stabilité sans qu'il ait à supporter un effort de compression de la même façon que cela se produit dans le problème 117 étudié plus haut.

120. Analysons la formule bien connue: « prenons la racine la plus petite, différente de zéro, de l'équation . . . »

A cause de son évidence, cette expression a pour ainsi dire acquis la nature d'un « code » et, d'ordinaire, l'on ne réfléchit guère à son contenu.

En effet, « la plus petite », parce que c'est la première et la plus petite valeur de la force critique qui nous intéresse. « Différente de zéro », parce qu'une valeur nulle de la racine nous donne la forme initiale d'équilibre qu'avait le système au point zéro. Pareille solution ne présente aucun intérêt.

Pour le système en question, avec $R/l \leqslant 0{,}5$, il faut justement prendre la valeur nulle de αl. En l'absence des forces de frottement, le système constitue un mécanisme. La barre perd de stabilité comme

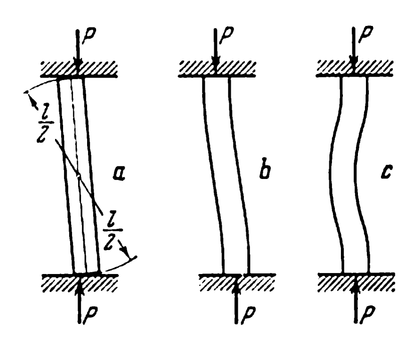


Fig. 340

un tout rigide pour une force P aussi petite que l'on veut. Pour $R/l = 0{,}5$, les deux bouts sont enveloppés par des arcs de cercle dont le centre se situe sur le milieu de la barre (fig. 340, *a*). Cette valeur du paramètre R/l est extrémale et, avec son augmentation, prennent naissance des formes fléchissantes de flambement. Ainsi, en l'absence des forces de frottement, les états critiques se caractérisent sur le diagramme de la fig. 341 par la courbe OAB.

Avec l'augmentation du rayon R le flambement se produit avec une incurvation de plus en plus grande de la barre en même temps qu'il y a un glissement transversal des bouts ou un déplacement libre des plaques dans une direction transversale. A la limite, pour $R = \infty$, le flambement se produit selon la forme représentée sur la fig. 340, *b*, c'est-à-dire pour $\alpha l = \pi$ et, par conséquent, $P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$.

Si les plaques n'avaient pas la possibilité de se déplacer librement dans la direction transversale et si les forces de frottement étaient suffisamment grandes pour prévenir tout glissement, l'état critique de la barre serait, en fonction de R/l, caractérisé par la courbe C (fig. 341). Pour $R/l = \infty$, le flambement se produit selon la forme représentée sur la fig. 340, *c*; alors $P_{cr}/P_E = 4$ et, par conséquent,

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}.$$

121. Pour une force $P = \pi^2 EJ/l^2$, la barre perd de stabilité et, ensuite, par sa partie médiane va toucher les parois du tube.

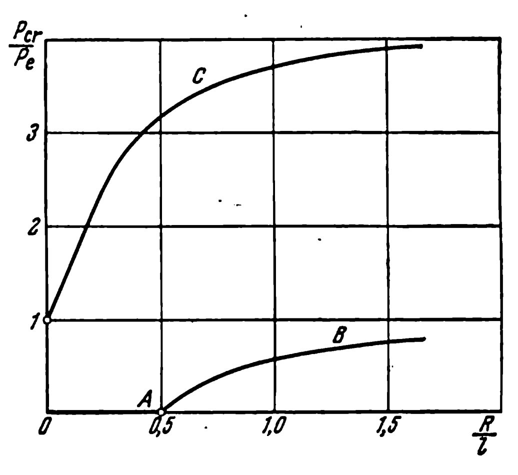


Fig. 341

Supposons que pour $P > \pi^2 EJ/l^2$ il existe une zone l_2 d'adhérence compacte de la barre aux parois du tube (fig. 342). Etablis-

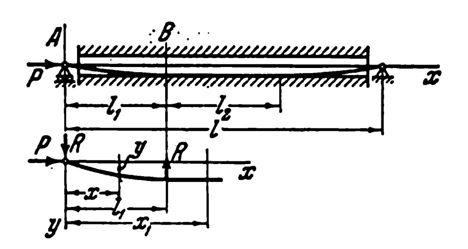


Fig. 342

sons l'équation de la déformée de la barre sur la partie $0 \leqslant x \leqslant l_1$:

$$EJy'' + Py = Rx,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{R}{P} x \quad \left(\alpha^2 = \frac{P}{EJ}\right);$$

$$\text{pour} \quad x = 0 \quad y = 0,$$

$$\text{»} \quad x = l_1 \quad y = \Delta,$$

$$\text{»} \quad x = l_1 \quad y' = 0,$$

d'où $B = 0$,

$$\left.\begin{aligned} A \sin \alpha l_1 + \frac{R}{P} l_1 &= \Delta, \\ A\alpha \cos \alpha l_1 + \frac{R}{P} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sur la partie l_2 la barre reste droite. Par conséquent, sur cette partie $M_{fl} = 0$. C'est pourquoi, d'après la fig. 342,

$$P\Delta - Rx_1 + R(x_1 - l_1) = 0,$$

de là

$$R = P\frac{\Delta}{l_1}.$$

Des équations (1), trouvons

$$A = \frac{\Delta}{\pi},$$

$$l_1 = \frac{\pi}{\alpha}, \quad P = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2}, \tag{2}$$

$$y = \frac{\Delta}{\pi}(\sin \alpha x + \alpha x); \tag{3}$$

de l'expression (2) il découle que pour $l_1 = l/2$

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{4}$$

Cela signifie que dans le cas où

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} < P < \frac{4\pi^2 EJ}{l^2},$$

la barre touche la paroi en un point seulement et ce n'est que pour

$$P > \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$$

qu'a lieu l'adhérence sur toute la partie.

Si la partie droite d'au milieu devient suffisamment longue, il peut s'y produire aussi un flambement. Déterminons la longueur l_1 pour laquelle cela va se produire. La force critique sera pour la partie du milieu

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{l_2^2} \quad (l_2 = l - 2l_1).$$

Or, d'autre part, $P = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2}$. Egalant ces forces, nous trouvons

$$l_1 = \frac{l}{4}, \quad P = \frac{16\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Après que la partie d'au milieu se soit incurvée, l_1 changera par bond sa valeur pour devenir égale à $l/6$. Considérant maintenant chaque tiers de la barre comme une nouvelle barre autonome, nous pouvons garder les équations obtenues plus haut en prenant soin d'y changer l par $l/3$. Avec cela, l'expression (4) donne :

$$l_1 = \frac{l}{6}, \quad P = \frac{36\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Cela signifie que pour

$$P > \frac{36\pi^2 EJ}{l^2}$$

commence de nouveau l'adhérence de la barre aux parois le long des parties. Pour

$$\frac{16\pi^2 EJ}{l^2} < P < \frac{36\pi^2 EJ}{l^2}$$

la barre touche les parois en trois points.

Lors du déchargement, la barre se détachera de la paroi supérieure non pas pour une force $P = 16\pi^2 EJ/l^2$, mais bien pour $P = 9\pi^2 EJ/l^2$.

Sur la fig. 343 sont représentées les principales formes d'équilibre de la barre et sont donnés les intervalles de variation des forces sous le chargement et sous le déchargement.

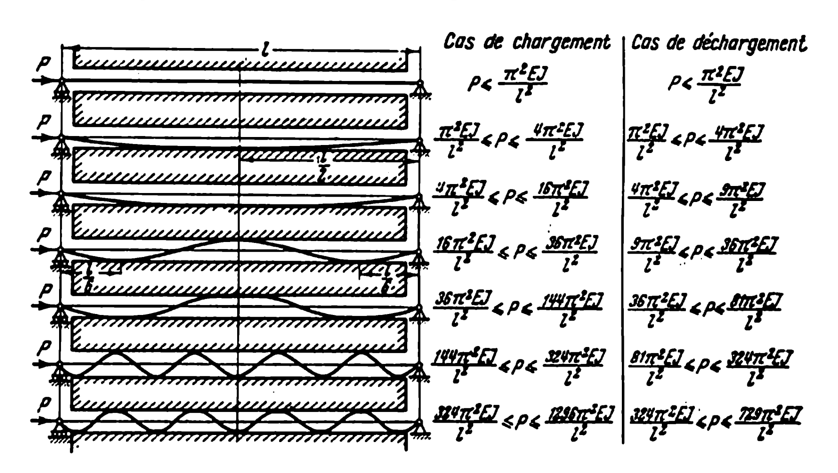


Fig. 343

Pour toutes les valeurs de la force P, les parties incurvées de la barre, du point d'inflexion jusqu'au point voisin d'adhérence à la paroi, ont une longueur l_1 et sont décrites par l'expression (3) établie pour la partie située à l'extrême gauche. Le moment fléchissant

$$EJy'' = -EJ\frac{\Delta\pi}{l_1^2}\sin\alpha x$$

a une valeur maximale $M_{\max} = EJ\frac{\Delta\pi}{l_1^2}$.

La contrainte maximale est égale à

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{EJ\Delta\pi}{l_1^2 W},$$

W étant le module de résistance de la section.

Si la barre a une section transversale ronde, on aura

$$\sigma_{\max} = \frac{P4}{\pi d^2} + \Delta\frac{\pi}{2}\frac{Ed}{l_1^2}. \tag{5}$$

Examinons deux exemples.

1) Supposons que la force P qui comprime la barre est égale à

$$\frac{30\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Des dessins (fig. 343) nous voyons que dans l'intervalle

$$\frac{16\pi^2 EJ}{l^2} \leqslant P \leqslant \frac{36\pi^2 EJ}{l^2}$$

$$l_1 = \text{const} = \frac{l}{6}.$$

L'expression (5) donne

$$\sigma_{\max} = \frac{3\pi dE}{8l^2}(5\pi d + 48\Delta).$$

2) Supposons que la force $P = 49\pi^2 EJ/l^2$. Dans l'intervalle

$$\frac{36\pi^2 EJ}{l^2} \leqslant P \leqslant \frac{144\pi^2 EJ}{l^2}$$

l_1 dépend de P. Par conséquent, conformément à l'expression (2)

$$l_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{P}{EJ}}} = \frac{l}{7}.$$

On aura alors de la formule (5)

$$\sigma_{\max} = \frac{49\pi\, dE}{16l^2}(\pi d + 8\Delta).$$

122. Sur la déformée de la barre incurvée (fig. 344), les points d'inflexion subdivisent les parties de la barre ayant pour rigidités

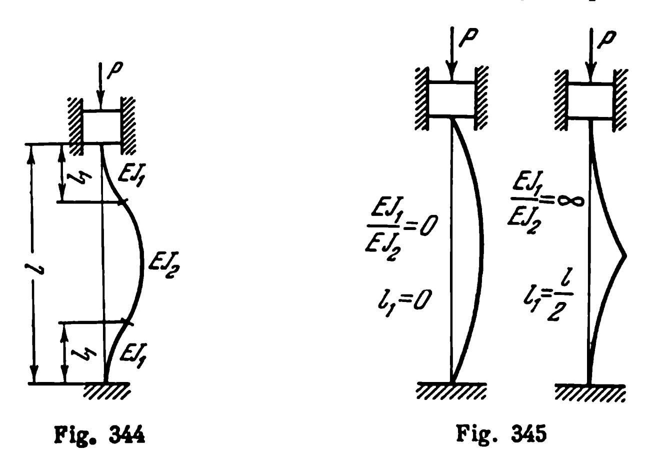


Fig. 344

Fig. 345

EJ_1 et EJ_2. La longueur du segment l_1 se détermine de la condition d'égalité des forces critiques pour les parties. De toute évidence,

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EJ_1}{4l_1^2} = \frac{\pi^2 EJ_2}{(1-2l_1)^2}, \tag{1}$$

de là

$$l_1 = \frac{l}{2}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1},$$

avec

$$k = \frac{EJ_1}{EJ_2}.$$

Si $k = 1$, comme il fallait s'y attendre, $l_1 = l/4$. Pour $k = 0$, nous avons $l_1 = 0$, tandis que pour $k = \infty$, nous obtenons $l_1 = l/2$. La forme de la déformée de la barre incurvée est, pour ces cas particuliers, montrée sur la fig. 345. La force critique s'obtient de l'expression (1) en y excluant l_1:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_1}{l^2}\frac{(1+\sqrt{k})^2}{k}. \qquad (2)$$

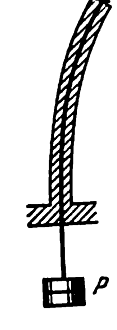


Fig. 346

Si, lors du flambement, la barre s'incurve dans le sens inverse, c'est-à-dire non pas à droite mais à gauche, les rigidités EJ_1 et EJ_2 devront, dans les expressions obtenues, échanger de places. Alors la valeur de l_1 va changer, mais la force critique restera la même. Effectivement, pour l'incurvation de la barre à gauche, l'intervertissement de EJ_1 et EJ_2 donne

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_2}{l^2}\frac{\left(1+\sqrt{\frac{1}{k}}\right)^2}{\frac{1}{k}},$$

ce qui ramène à l'expression (2).

123. En faisant dévier la barre de la verticale (fig. 346), nous voyons que la position du poids ne change pas. La force P n'effectue pas de travail. La stabilité de la forme rectiligne d'équilibre s'observe pour n'importe quel P.

124. Il est naturel que, contrairement au cas précédent, le flambement de la barre survient ici pour $P = \pi^2 EJ/4l^2$.

Tant que le câble n'adhérera pas à la paroi du tube, c'est-à-dire tant que la flèche f ne dépassera pas Δ, la dépendance entre P et f s'exprimera par un segment de droite

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = \text{const}$$

(fig. 348). La flèche reste indéterminée. Seule la théorie des grands déplacements permet de découvrir les déviations de cette droite. Une curieuse particularité de ce problème est constituée par le fait que, avec l'accroissement ultérieur de la flèche, le déplacement f se détermine déjà à la base de la théorie linéaire ordinaire.

Après qu'une partie du câble ait adhérée à la paroi du tube en état d'incurvation, nous aurons deux parties: OA et AB (fig. 347).

Sur la partie OA, le moment fléchissant est égal à $P\Delta$, et le tube s'incurve selon une courbe du second degré

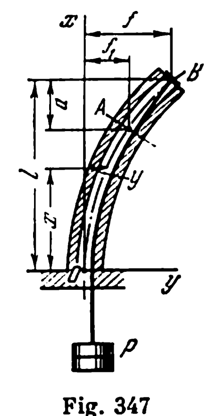


Fig. 347

$$y = \frac{P\Delta}{2EJ} x^2.$$

Dans le point A, la flèche sera

$$f_1 = \frac{P\Delta}{2EJ} (l-a)^2.$$

S'il n'y avait pas eu d'incurvation de la barre sur la partie AB, le déplacement au point B serait le suivant:

$$\frac{P\Delta}{2EJ}(l-a)^2 + y'_{x=l-a}\, a = \frac{P\Delta}{2EJ}(l-a)^2 + \\ + \frac{P\Delta}{EJ}(l-a)\, a.$$

Or, l'incurvation de la seconde partie est justement telle que le point B dévie de la tangente d'une valeur égale à Δ. Par conséquent,

$$f = \frac{P\Delta}{2EJ}(l-a)^2 + \frac{P\Delta}{EJ}(l-a)\, a + \Delta,$$

ou

$$f = \frac{P\Delta}{2EJ}(l^2 - a^2) + \Delta.$$

La grandeur a représente la longueur d'une barre qui, encastrée à l'une de ses extrémités, perd de stabilité pour une force P, c'est-à-dire

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4a^2}.$$

Par conséquent, $a^2 = \frac{\pi^2 EJ}{4P}$, et, alors

$$f = \Delta\left(\frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{\pi^2}{8} + 1\right)$$

ou

$$\frac{f}{\Delta} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{P}{P_E} - 1\right) + 1,$$

avec $P_E = \pi^2 EJ/4l^2$. Sur la fig. 348 on a montré la variation de f en fonction de P.

125. Dans le second cas, la force critique sera quatre fois plus grande que dans le premier cas. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le montant dans les deux cas en état d'incurvation (fig. 349).

Dans le premier cas

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Dans le second cas, au cours de l'incurvation de la barre, la force suit le mouvement de l'extrémité inférieure de la barre et, par conséquent, le moment fléchissant dans l'encastrement reste constamment

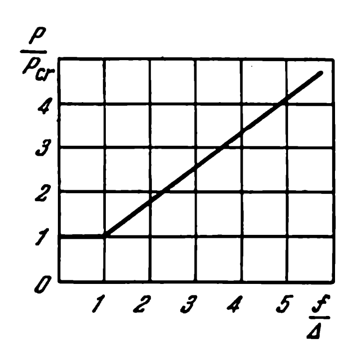


Fig. 348

nul. Ainsi, le second cas de chargement du montant ne diffère en rien du cas des appuis articulés sur les bouts du montant (fig. 349). C'est pourquoi, ici $P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$.

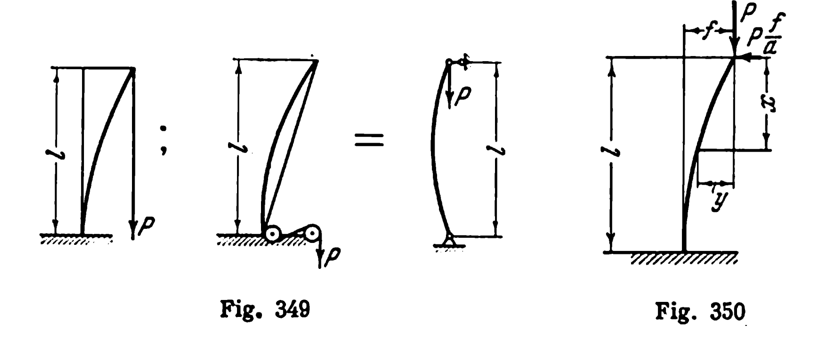


Fig. 349 Fig. 350

126. Décomposons la force P en composantes verticale et horizontale (fig. 350):

$$P_{vert} \approx P, \quad P_{hor} \approx P\frac{f}{a}$$

et écrivons l'équation de la déformée de la poutre:

$$EJy'' = -Py + P\frac{f}{a}x.$$

Désignons $\frac{P}{EJ} = \alpha^2$. L'équation et sa solution seront alors

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 \frac{f}{a} x,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{f}{a} x.$$

Pour déterminer A, B et f nous disposons des conditions aux limites suivantes :

$$\text{pour } x = 0 \quad y = 0,$$
$$\text{pour } x = l \quad y = f, \quad y' = 0,$$

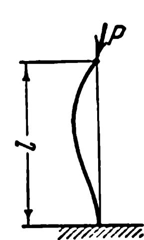
de là

$$B = 0, \quad A \sin \alpha l + \frac{f}{a} l = f, \quad A\alpha \cos \alpha l + \frac{f}{a} = 0.$$

Nous obtenons la valeur critique de la force P de l'équation transcendante suivante

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l \left(1 - \frac{a}{l}\right). \tag{1}$$

Si $a = \infty$ (premier cas du problème précédent),



$$\alpha l = \frac{\pi}{2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Si $a = l$ (second cas du problème précédent),

$$\alpha l = \pi, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Fig. 351

Pour $a = 0$, la ligne d'action de la force coupe constamment la verticale initiale dans le point $x = 0$. Cela n'est possible que dans le cas où le bout de la barre ne se déplace pas (fig. 351). On aura alors

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l, \quad \alpha l = 4{,}49, \quad P_{cr} = 20{,}19 \frac{EJ}{l^2}.$$

127. Après la résolution des deux problèmes précédents, le problème posé ne suscite guère des difficultés.

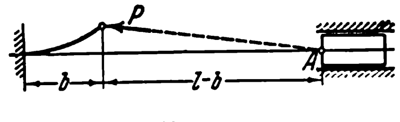


Fig. 352

La barre gauche ayant une longueur b se trouve sous l'action d'une force de compression tournante (fig. 352) et dont la ligne d'action

passe constamment par le point A. C'est pourquoi, la force critique sera pour la barre gauche non pas $\pi^2 EJ/4b^2$, comme on pourrait le croire à première vue, mais bien celle que donnera l'équation transcendante (1) du problème précédent, à condition d'y remplacer l par b et a par $a = -(l-b)$, c'est-à-dire $\operatorname{tg} \alpha b = \alpha l$ avec $\alpha = \sqrt{P/EJ}$.

La force critique sera pour la barre droite

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(l-b)^2}.$$

La marge de stabilité sera la même pour les barres si les forces critiques sont identiques. C'est pourquoi,

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EJ}} = \frac{\pi}{l-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi b}{l-b} = \frac{\pi l}{l-b}.$$

De là nous trouvons aussi la relation $\frac{b}{l}$:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \frac{b}{l}}{1-\frac{b}{l}} = \frac{\pi}{1-\frac{b}{l}}, \quad \frac{b}{l} = 0{,}301.$$

128. Pour déterminer la force critique, il n'y a aucune nécessité de considérer la pression de contact entre la barre et le câble.

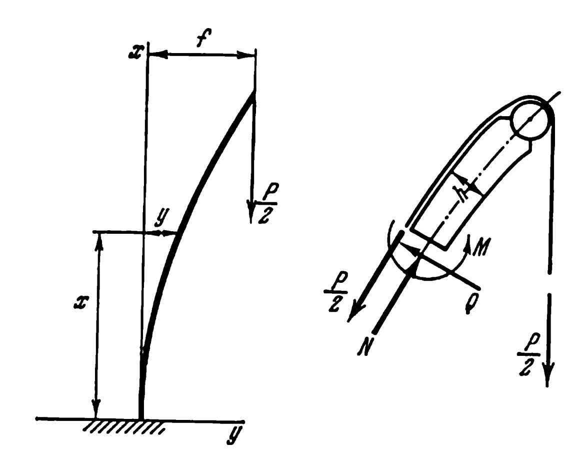


Fig. 353

Enlevons une partie de la barre (fig. 353) et déterminons le moment fléchissant

$$M = \frac{P}{2}\left(f - y + \frac{h}{2}\right) - \frac{P}{2}\frac{h}{2}.$$

$h/2$ étant la moitié de l'épaisseur de la barre. De là

$$EJy'' = \frac{P}{2}(f - y).$$

Ainsi, nous avons le cas habituel d'une barre encastrée, sollicitée par une force $P/2$:

$$\left(\frac{P}{2}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

129. Supposons qu'un déplacement horizontal f a été communiqué à l'extrémité supérieure de la barre (fig. 354, *a*). L'angle d'inclinaison de la moitié gauche du câble diminuera alors de $\Delta\alpha$, tandis que

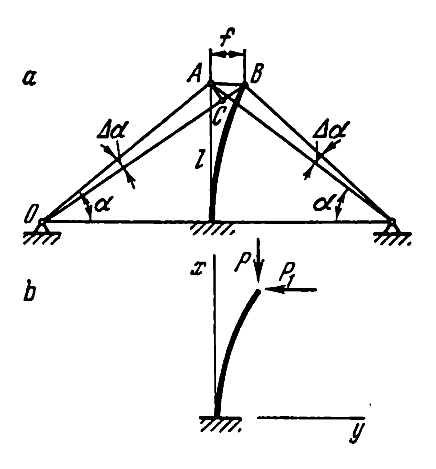


Fig. 354

l'angle d'inclinaison de la moitié droite augmentera de la même quantité. En définitive, apparaîtra une force horizontale

$$P_1 = N\cos(\alpha - \Delta\alpha) - N\cos(\alpha + \Delta\alpha),$$

N étant la force d'extension du câble.

Comme $\Delta\alpha$ est petit, on aura

$$P_1 = 2N\sin\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Or, $2N\sin\alpha = P$, c'est pourquoi $P_1 = P\Delta\alpha$. Ensuite, du triangle ABC il ressort que

$$OA \cdot \Delta\alpha = f\sin\alpha,$$

mais comme $OA = \frac{l}{\sin\alpha}$, on aura

$$\Delta\alpha = \frac{f}{l}\sin^2\alpha$$

$$P_1 = P\frac{f}{l}\sin^2\alpha.$$

Il ne reste qu'à déterminer la force critique d'une barre sur l'extrémité libre de laquelle (fig. 354, *b*) sont appliquées une force verticale P et une force horizontale P_1:

$$EJy'' = P(f-y) - P\frac{f}{l}\sin^2\alpha\cdot(l-x).$$

Après avoir désigné P/EJ par k^2, nous aurons

$$y'' + k^2y = k^2f - k^2\frac{f}{l}\cdot(l-x)\sin^2\alpha.$$

Ensuite,

$$y = A\sin kx + B\cos kx + f - \frac{f}{l}(l-x)\sin^2\alpha.$$

Pour $x = 0$, $y = 0$ et $y' = 0$; pour $x = l$, $y = f$. Cela conduit à un système d'équations

$$B + f\cos^2\alpha = 0, \quad Ak + \frac{f}{l}\sin^2\alpha = 0,$$

$$A\sin kl + B\cos kl = 0.$$

Egalant à zéro le déterminant, nous en arrivons à une équation transcendante

$$\operatorname{tg} kl = -kl\operatorname{cotg}^2\alpha.$$

De là se détermine la valeur de kl en fonction de α. Ainsi, la force critique dépend de l'angle d'inclinaison des câbles.

Au fur et à mesure que l'angle α diminue, la force critique pour la barre se rapproche de la valeur

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2},$$

mais avec cela, la force N agissant dans le câble tend vers l'infini.

Si $\alpha = \pi/2$, $kl = \pi$ et alors

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

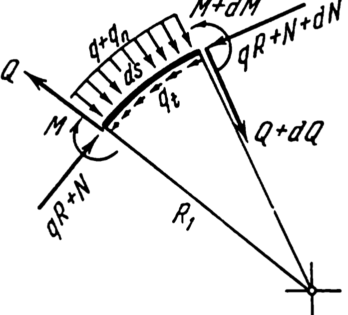


Fig. 355

130. Considérons les conditions d'équilibre d'un élément incurvé, de longueur ds, prélevé de l'anneau (fig. 355).

Dans les sections de l'anneau se créent un effort tranchant Q, un moment fléchissant M et un effort normal qui se présente sous forme de la somme d'une force subcritique qR et d'un petit supplément N. Pour tenir compte de l'une ou l'autre particularité du com-

portement de la force extérieure, des composantes normale q_n et tangentielle q_t ont été introduites. En particulier, si l'anneau est sollicité par des forces créées par la pression d'un gaz ou d'un liquide, $q_n = q_t = 0$. Par R_1 on a désigné le nouveau rayon local de la courbure de l'élément

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \varkappa, \tag{1}$$

$\varkappa$ étant la variation de la courbure de l'arc de l'anneau.

Etablissons les équations d'équilibre de l'élément:

$$Q = \frac{dM}{ds}, \quad \frac{dN}{ds} + q_t + \frac{Q}{R_1} = 0, \quad q + q_n + \frac{dQ}{ds} - \frac{N + qR}{R_1} = 0.$$

Excluons $1/R_1$ et, tenant compte du fait que $\varkappa$, Q et N sont des grandeurs petites, nous n'examinons que les termes contenant leurs premières puissances. On aura alors

$$Q = \frac{dM}{ds}, \quad \frac{dN}{ds} + q_t + \frac{Q}{R} = 0, \quad qR\varkappa + q_n + \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R} = 0.$$

Comme $M = EJ\varkappa$, nous obtiendrons, après avoir exclu N et Q,

$$EJ\frac{d^3\varkappa}{ds^3} + \left(qR + \frac{EJ}{R^2}\right)\frac{d\varkappa}{ds} + \frac{dq_n}{ds} + \frac{1}{R}q_t = 0. \tag{2}$$

Supposons que l'anneau est sollicité par une pression dirigée selon la normale à la surface. Comme cela a été déjà dit, on aura alors $q_n = q_t = 0$ et

$$EJ\frac{d^3\varkappa}{ds^3} + \left(qR + \frac{EJ}{R^2}\right)\frac{d\varkappa}{ds} = 0.$$

Posant $\varkappa = A \sin\frac{ns}{R}$, trouvons

$$-EJ\frac{n^3}{R^3} + \left(qR + \frac{EJ}{R^2}\right)\frac{n}{R} = 0,$$

de là

$$q_{cr} = \frac{(n^2 - 1)EJ}{R^3}.$$

q_{cr} atteint sa valeur minimale, différente de zéro, pour $n = 2$. En définitive, nous obtenons

$$q_{cr} = \frac{3EJ}{R^3}.$$

Examinons maintenant un autre procédé de création de la charge q. Supposons que l'anneau est sollicité par des efforts radiaux que l'on crée à l'aide d'une série de fils en caoutchouc réunis au centre en un nœud (fig. 124, *b*). Dans ce cas, la charge q est dirigée vers le centre de l'anneau. Lorsque l'arc ds tourne, il se forme une composante de la

charge tangentielle

$$q_t = q\frac{dw}{ds},$$

w étant le déplacement radial des points de l'anneau.

Si les fils sont suffisamment flexibles ou si chacun d'eux se tend de façon autonome, la composante normale des forces extérieures ne changera pas avec l'apparition des déplacements w et, par conséquent, $q_n = 0$.

La dimension de la courbure $\varkappa$ s'exprime au moyen de w de la manière suivante :

$$\varkappa = \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2},$$

et l'équation (2) prend la forme suivante

$$EJ\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2}\right) + \left(qR + \frac{EJ}{R^2}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2}\right) + \frac{q}{R}\frac{dw}{ds} = 0. \qquad (3)$$

En posant $w = A\sin\frac{ns}{R}$, nous obtenons

$$q_{cr} = \frac{(n^2-1)^2 EJ}{(n^2-2)R^3}.$$

Pour $n = 2$

$$q_{cr} = \frac{9EJ}{2R^3},$$

c'est-à-dire la charge critique est 1,5 plus grande que dans le cas d'une charge hydrostatique.

Si au moyen d'un poids commun on tend les fils (dotés d'une certaine rigidité), il y aura, lors de la flexion de l'anneau, une redistribution des efforts. Dans la zone des w positifs, les fils connaîtront une traction supplémentaire, alors que dans la zone des w négatifs, ils vont raccourcir. On assiste à une modification de la composante normale q_n. Nous obtiendrons alors dans l'équation (3) un terme supplémentaire $q_n = Kw$, K étant le coefficient de rigidité des fils. En définitive,

$$q_{cr} = \frac{EJ}{R^3}\,\frac{(n^2-1)^2 + \frac{KR^4}{EJ}}{n^2-2}.$$

L'augmentation de la rigidité des fils K conduit à un accroissement de la charge critique. Et cela est compréhensible : les efforts supplémentaires qui se créent sont dirigés de telle façon que l'anneau rétablisse sa forme circulaire. q_{cr} atteint, généralement parlant, sa valeur critique inférieure non plus pour $n = 2$, mais pour un certain autre n, entier et dépendant de la valeur de K.

131. Examinons le système dans une position légèrement déséquilibrée (fig. 356).

La longueur des tirants a est plus grande que celle de la bielle b. C'est pourquoi, il se crée une composante des forces dirigée vers le

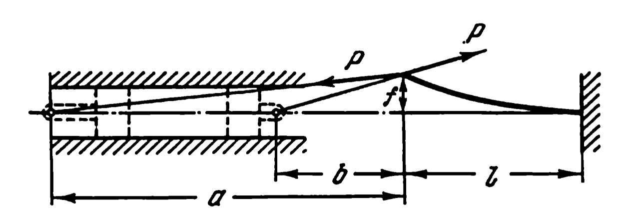


Fig. 356

haut et égale à

$$P_1 = P\left(\frac{f}{b} - \frac{f}{a}\right).$$

Sous l'action de cette force, la flèche f sera

$$f = \frac{P_1 l^3}{3EJ}.$$

En éliminant P_1, nous trouverons la valeur de la force critique:

$$P_{cr} = \frac{3EJ}{l^3} : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

132. Le thème du problème proposé est le même que dans le problème 131. Dans la position initiale, les moments sont mutuellement équilibrés et dans la barre, il n'y a pas de contraintes. Cependant, lorsque le système est dévié de cette position, les moments vont avoir un comportement différent. Lors de la flexion dans le plan xz (fig. 357) le plan du moment M_2 se retourne ensemble avec la section frontale. Quant au plan du moment M_1, il reste inchangé. Lors de la flexion dans le plan xy, le plan du moment M_2 ne change pas, alors que le plan dans lequel agit le moment M_1 se retourne.

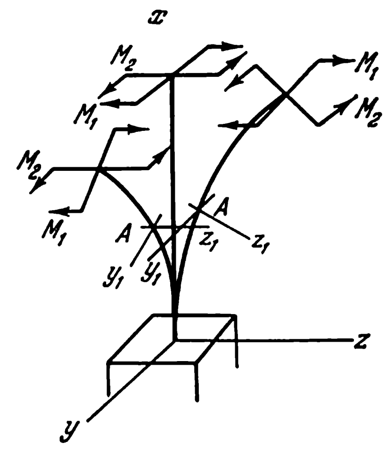


Fig. 357

Supposons pour simplifier les choses, que les longueurs des câbles à travers lesquels se transmettent les forces P, sont suffisamment grandes. Cela permet de dire que la rotation du moment M_1 dans un plan et du moment M_2 dans un autre, coïncide totalement avec la rotation de la section frontale.

Désignons respectivement par φ_y et φ_z les angles de rotation de cette section par rapport aux axes y et z. Alors, dans une section quelconque A, les moments par rapport aux axes mobiles y_1 et z_1 seront

$$M_{y_1} = M_1(\varphi_z - y') + M_2 y',$$
$$M_{z_1} = M_1 z' + M_2(\varphi_y - z').$$

En définitive, nous obtenons deux équations:

$$\left.\begin{aligned} EJ_y z'' &= M_1(\varphi_z - y') + M_2 y', \\ EJ_z y'' &= M_1 z' + M_2(\varphi_y - z'). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Comme $J_y = J_z = J$ et $M_1 = M_2$, on aura

$$EJz'' = M\varphi_z, \quad EJy'' = M\varphi_y,$$

de là

$$z = \frac{M}{EJ}\left(\varphi_z \frac{x^2}{2} + A_1 x + B_1\right),$$
$$y = \frac{M}{EJ}\left(\varphi_y \frac{x^2}{2} + A_2 x + B_2\right).$$

Pour $x = 0$ $z = 0$, $z' = 0$, $y = 0$, $y' = 0$ et c'est pourquoi, $A_1 = A_2 = 0$; $B_1 = B_2 = 0$. Pour $x = l$ $y' = \varphi_z$ et $z' = \varphi_y$; on aura alors

$$\varphi_y = \frac{Ml}{EJ}\varphi_z; \quad \varphi_z = \frac{Ml}{EJ}\varphi_y.$$

Il est évident que φ_y et φ_z ne sont pas nuls dans le seul cas où

$$\frac{Ml}{EJ} = \pm 1,$$

et c'est de là que l'on obtient la valeur du moment critique.

133. Recourons aux équations (1) du problème précédent. Après avoir posé $M_1 = M$ et $M_2 = 0$, nous obtiendrons

$$EJ_y z'' = M(\varphi_z - y'),$$
$$EJ_z y'' = Mz'.$$

De là

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \varphi_z x + C,$$
$$z = \frac{EJ_z}{M}(A\alpha \cos \alpha x - B\alpha \sin \alpha x + \varphi_z + D),$$

avec

$$\alpha^2 = \frac{M^2}{EJ_y EJ_z}$$

Pour $x = 0$, nous avons $y = z = 0$, et aussi $y' = z' = 0$. Alors,

$$B + C = 0, \quad A\alpha + \varphi_z = 0,$$
$$A\alpha + \varphi_z + D = 0, \qquad B\alpha^2 = 0,$$

d'où

$$B = C = D = 0.$$

Pour $x = l$, l'angle $y' = \varphi_z$. Cela donne $A \cos \alpha l = 0$. Par conséquent, l'état critique survient quand

$$\alpha l = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\frac{Ml}{\sqrt{EJ_y EJ_z}} = \frac{\pi}{2}.$$

L'invertissement des places de J_y et J_z ne modifiera pas la valeur du moment critique. C'est pourquoi, les cas de sollicitation montrés sur la fig. 127, *a* et *b* sont équivalents.

134. L'équation différentielle de la déformée de la barre (fig. 358) sera

$$EJy'' = P(f + R\varphi - y),$$

de là

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + f + R\varphi,$$

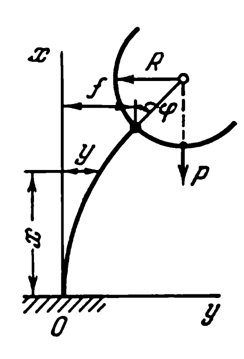


Fig. 358

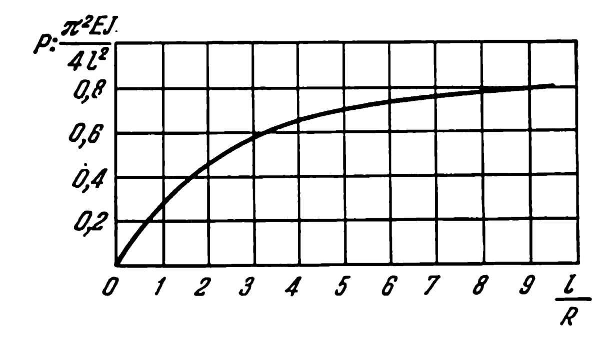


Fig. 359

ici, comme d'ordinaire, $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$.

$$\text{Pour} \quad x = 0 \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y' = 0.$$
$$\text{Pour} \quad x = l \quad y = f \quad \text{et} \quad y' = \varphi.$$

Cela donne

$$B+f+R\varphi=0, \quad A=0,$$
$$A\sin\alpha l+B\cos\alpha l+R\varphi=0,$$
$$A\alpha\cos\alpha l-B\alpha\sin\alpha l=\varphi.$$

Etablissons le déterminant d'un système de trois équations par rapport aux inconnues B, f et φ et égalons-le à zéro. Cela donne une équation transcendante

$$\frac{l}{R}=\alpha l \operatorname{tg}\alpha l.$$

Sur la fig. 359 on a montré la courbe de dépendance de la force critique en fonction de l/R.

135. L'équation différentielle de la déformée de la barre (fig. 360) sera la suivante:

$$EJy''=P(f-y)+M. \tag{1}$$

La force P est, de toute évidence, égale au poids du liquide $P = \gamma\pi R^2h$, γ étant le poids spécifique du liquide.

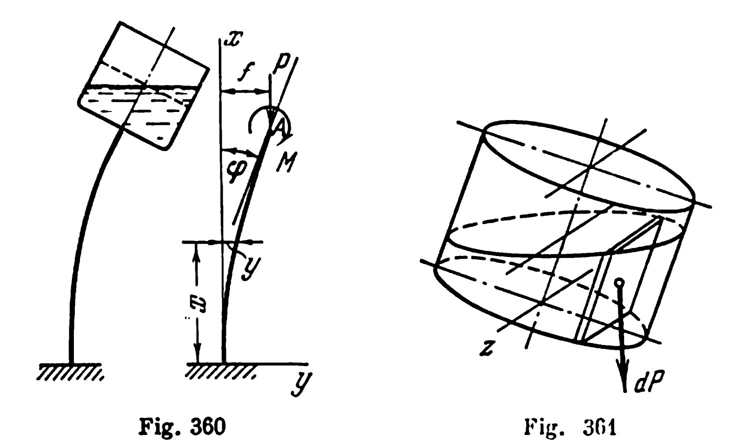


Fig. 360

Fig. 361

Le moment M s'obtient en calculant la somme des moments créés par les forces élémentaires dP (fig. 361) par rapport à l'axe z. L'angle φ de rotation du réservoir est supposé petit. Après intégration nous obtenons

$$M=\frac{\gamma\pi R^2}{4}(2h^2+R^2)\varphi. \tag{2}$$

Résolvons l'équation (1)

$$y=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x+f+\frac{2h^2+R^2}{4h}\varphi.$$

Pour $x=0$ $y=0$ et $y'=0$.

Pour $x=l$ $y=f$ et $y'=\varphi$.

Ces conditions donnent

$$B+f+\frac{2h^2+R^2}{4h}\varphi=0,\ A=0,$$

$$A\sin\alpha l+B\cos\alpha l+\frac{2h^2+R^2}{4h}\varphi=0,$$

$$A\alpha\cos\alpha l-B\alpha\sin\alpha l=\varphi.$$

De ces deux dernières équations, nous obtenons

$$\frac{\alpha l\operatorname{tg}\alpha l}{4\frac{h}{l}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+\frac{R^2}{l^2}\right)=1.$$

Substituant à P sa valeur, nous obtenons

$$\alpha l=\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,l=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2l^3}{EJ}}\sqrt{\frac{h}{l}}.$$

La grandeur cherchée h/l se détermine de l'équation transcendante

$$\frac{a}{4}\,\frac{\operatorname{tg}a\sqrt{\frac{h}{l}}}{\sqrt{\frac{h}{l}}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+b^2\right)=1 \tag{3}$$

et dépend de deux paramètres :

$$a=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2l^3}{EJ}}\quad\text{et}\quad b=\frac{R}{l}.$$

En fonction de ces paramètres, on peut trouver dans chaque cas particulier le niveau du liquide pour lequel survient le flambement.

Si le contenu du réservoir ne possédait pas la propriété de fluidité, par exemple, si le réservoir était rempli de sable, le moment M serait plus petit que (2), à savoir :

$$M=\gamma\pi R^2\frac{h^2}{2}\varphi.$$

Cela conduirait à une augmentation sensible de la charge critique. La différence entre les forces critiques sera d'autant plus grande que le sera le diamètre du réservoir. La mobilité du contenu du réservoir a pour conséquence que pour le schéma montré sur la fig. 362, un flambement peut aussi survenir. Le niveau critique de remplissage h/l s'obtient de la même équation transcendante (3) si l'on y change la tangente circulaire par une tangente hyperbolique.

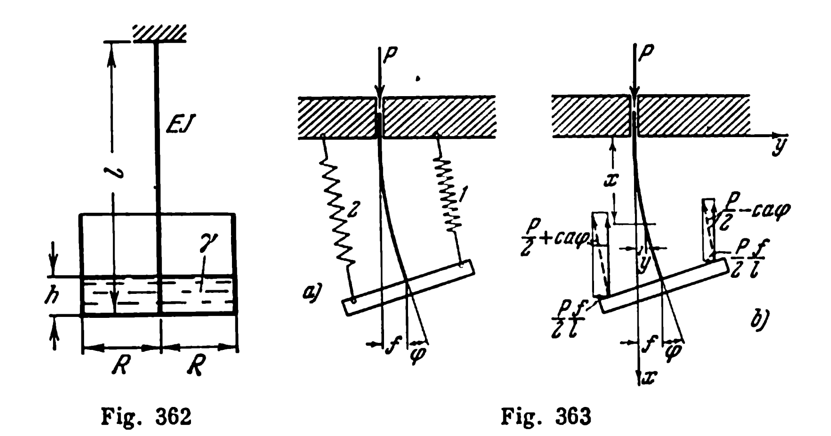


Fig. 362 Fig. 363

136. Désignons par l_0 la longueur libre de la barre avant l'application de la force P. La longueur de la barre au moment du flambement sera

$$l = l_0 + \frac{P_{cr}}{2c}. \tag{1}$$

Considérons la barre dans une position incurvée (fig. 363, *a*). Rejetant les ressorts, nous obtiendrons un système de forces agissant sur la plaque. Ce système de forces est représenté sur la fig. 363, *b*. Du côté du premier ressort va agir une force égale à $P/2 - ca\varphi$, tandis que du côté du second ressort, une force égale à $P/2 + ca\varphi$, φ étant l'angle de rotation de la plaque.

Décomposons chacune de ces forces en composantes verticale et horizontale. A cause de la petitesse des angles, les composantes verticales resteront approximativement égales aux valeurs totales des forces :

$$\frac{P}{2} - ca\varphi \quad \text{et} \quad \frac{P}{2} + ca\varphi.$$

Les composantes horizontales seront respectivement pour le premier et le second ressorts

$$\frac{f}{l-a\varphi}\left(\frac{P}{2} - ca\varphi\right), \quad \frac{f}{l+a\varphi}\left(\frac{P}{2} + ca\varphi\right),$$

où f est le déplacement du bout de la barre. Si l'on n'examine que les termes contenant les déplacements à la première puissance, nous obtiendrons

$$\frac{P}{2}\frac{f}{l} \quad \text{et} \quad \frac{P}{2}\frac{f}{l}.$$

Etablissons maintenant les équations différentielles de l'axe incurvé de la barre :

$$EJy'' = \left(\frac{P}{2} - ca\varphi\right)(f + a - y) + \left(\frac{P}{2} + ca\varphi\right)(f - a - y) -$$
$$- \frac{P}{2}\frac{f}{l}(l - x) - \frac{P}{2}\frac{f}{l}(l - x),$$

ou bien

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 \frac{f}{l} x - \frac{2ca^2}{EJ} \varphi \quad \left(\alpha^2 = \frac{P}{EJ}\right),$$

de là

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{f}{l} x - \frac{2ca^2}{EJ\alpha^2} \varphi.$$

Pour $x=0$ $y=0$ et $y'=0$.

Pour $x=l$ $y=f$ et $y'=\varphi$

Conformément à ces conditions, nous obtenons

$$B - \frac{2ca^2}{EJ\alpha^2} \varphi = 0, \quad A\alpha + \frac{f}{l} = 0.$$

$$A \sin \alpha l + B \cos \alpha l - \frac{2ca^2}{EJ\alpha^2} \varphi = 0,$$

$$A\alpha \cos \alpha l - B\alpha \sin \alpha l + \frac{f}{l} - \varphi = 0$$

Prenant A, B, f et φ pour les inconnues, égalons à zéro le déterminant de ce système

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{2ca^2}{EJ\alpha^2} \\ \alpha & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 & -\frac{2ca^2}{EJ\alpha^2} \\ \alpha \cos \alpha l & -\alpha \sin \alpha l & \frac{1}{l} & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

de là

$$\frac{\alpha l \sin \alpha l}{1 - \cos \alpha l} = -\frac{4ca^2 l}{EJ}. \tag{2}$$

La charge critique cherchée P_{cr} figure aussi bien dans l'expression de α comme dans celle de l. Remplaçons ici l par sa valeur tirée de (1), c'est-à-dire

$$l = l_0 + \frac{P_{cr}}{2c} = l_0 \left[1 + \alpha^2 l_0^2 \frac{EJ}{2cl_0^3} \right].$$

L'équation (2) prendra alors la forme suivante

$$\frac{\alpha l_0 \sin [\alpha l_0 (1 + k\alpha^2 l_0^2)]}{1 - \cos [\alpha l_0 (1 + k\alpha^2 l_0^2)]} = -\frac{a^2}{l_0^2} \frac{2}{k}, \tag{3}$$

avec

$$k = \frac{EJ}{2cl_0^3}. \tag{4}$$

De cette équation, on détermine, pour des paramètres donnés a/l_0 et k, αl_0 et puis, P_{cr}.

Sur la fig. 364, on a représenté les courbes de dépendance P_{cr}/P_E de a/l_0 pour certaines valeurs de k. Avec l'accroissement de $\frac{a}{l_0}$ la valeur de P_{cr} augmente. De la même façon, P_{cr} augmente avec la diminution de k, c'est-à-dire avec l'augmentation de la rigidité c des ressorts.

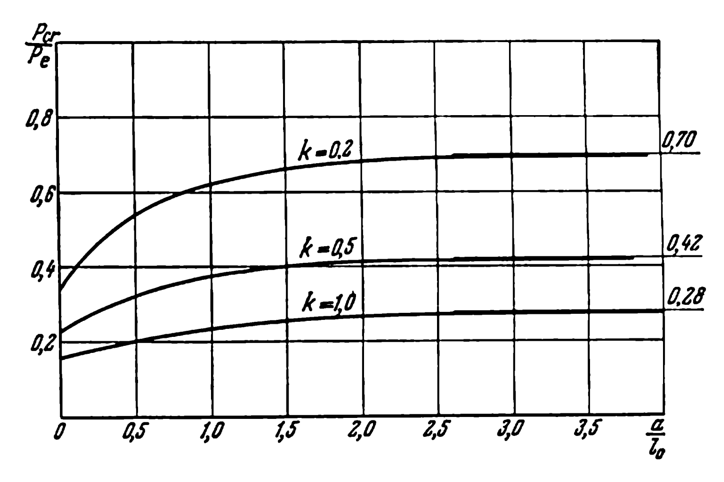


Fig. 364

Pour $c = \infty$, nous avons $k = 0$. Pour $a/l_0 \neq 0$, nous obtenons alors

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l_0^2},$$

c'est-à-dire P_{cr} est égale à la force critique d'une barre aux extrémités encastrées. Par contre, dans le cas où $a/l_0 = 0$, mais avec c toujours égale à l'infini, nous trouverons

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2},$$

c'est-à-dire P_{cr} est égale à la force critique d'une barre aux extrémités dotées d'appuis articulés.

137. Le problème proposé touche des questions de stabilité essentiellement nouvelles et ne se prête guère à la résolution au moyen des méthodes habituelles.

En effet, en portant les forces de compression que montre la fig. 131, c sur l'axe de la barre, nous obtiendrons le schéma suivant de sollicitation (fig. 365). La barre se trouve comprimée par des forces P et, simultanément, soumise à la flexion par deux moments $M = Pe$ agissant dans une direction opposée au sens de la rotation des bouts de la barre. L'équation de la déformée sera

$$EJy'' = -Py + Pe,$$

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 e \quad \left(\alpha^2 = \frac{P}{EJ}\right),$$

de là

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + e,$$

pour $x = 0$, la flèche $y = 0$, tout comme pour $x = 2l$; par conséquent,

$$A = e\,\frac{\cos 2\alpha l - 1}{\sin 2\alpha l}, \quad B = -e,$$

$$y = e\left[\frac{\cos 2\alpha l - 1}{\sin 2\alpha l} \sin \alpha x - \cos \alpha x + 1\right].$$

Ainsi, l'on obtient des valeurs bien définies de la flèche qu'aurait pu avoir la barre si dès le début du chargement on lui avait appliqué des moments Pe qui augmenteraient progressivement avec l'augmentation des forces P. Ainsi, dans les calculs effectués, on ne parvient pas à saisir le passage critique de la forme rectiligne d'équilibre à la forme curviligne et on obtient le cas de flexion composée dans sa forme pure.

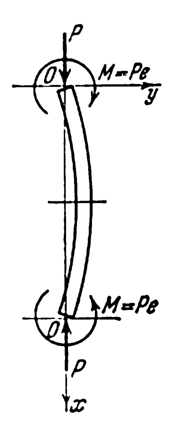
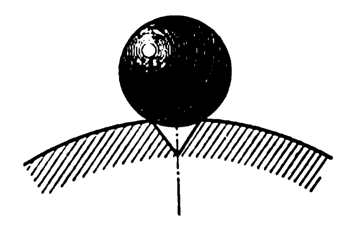


Fig. 365

Examinons les principes fondamentaux de la stabilité. Pour n'importe quelle déviation de la position d'équilibre, un système flexible sera dit stable si, abandonné à lui-même, il revient à sa position initiale, la déviation étant aussi petite que l'on veut (soulignons: aussi petite que l'on veut).

Avec cela, il reste cependant à savoir si un système flexible va regagner sa position initiale si on le dévie « un peu plus », c'est-à-dire si on lui communique, non pas une déviation aussi petite que l'on veut, mais tout simplement une déviation petite, mais finie, plus grande qu'une certaine grandeur fixée à l'avance (ne serait-ce que très petite). Ne peut-il pas arriver que pour des déviations aussi petites que l'on veut le système revient à sa position initiale, tandis que pour certaines autres, petites, mais plus grandes que celle donnée, n'y revient pas?

Cela peut effectivement avoir lieu. En voici un modèle mécanique: une bille posée dans un petit creux se trouvant au sommet d'une paroi concave (fig. 366). Si l'on communique à cette bille une petite déviation, elle va revenir à sa position initiale, mais si cette déviation est suffisamment grande, elle n'y reviendra pas. S'il n'y avait pas de creux, la position d'équilibre serait tout simplement instable.


Fig. 366

Ainsi, nous en arrivons à une nouvelle appréciation du problème de la stabilité, appréciation fondée sur la communication à un système de perturbations, non pas aussi petites que l'on veut, mais plus élevées qu'une certaine grandeur fixée à l'avance. Une telle façon de concevoir le problème de la stabilité porte le nom d'appréciation de la stabilité « dans le grand ». Par contre, la conception ordinaire de la stabilité, fondée sur la communication à un système des déplacements aussi petits que l'on veut, porte le nom d'appréciation de la stabilité « dans le petit ».

Cette terminologie introduite dans la théorie de la stabilité des systèmes flexibles a été empruntée de la théorie générale de la stabilité du mouvement et est devenue aujourd'hui généralement reconnue.

Dans l'exemple en question, la barre est stable dans le petit, mais pas toujours stable dans le grand. Effectivement, si nous communiquons à la barre une déviation assez petite de sa forme rectiligne d'équilibre, le moment Pe qui fait rentrer la barre à sa position initiale, sera plus grand que les moments Py qui la font dévier (puisque l'on peut prendre y aussi petit que l'on veut) et, lorsqu'on élimine ensuite les causes qui étaient à la base de cette petite déviation, la barre reviendra à sa forme rectiligne d'équilibre. Cela peut avoir lieu pour n'importe quelle valeur de la force P ne dépassant pas $4\pi^2EJ/(2l)^2$, valeur pour laquelle la barre perd déjà sa stabilité dans le petit selon la forme représentée sur la fig. 131, *b*.

Dans des conditions réelles, les perturbations externes (incurvation de la barre, forces excentrées, chocs accidentels) ont toujours une valeur finie et, suite à ces facteurs, la barre passe à une nouvelle forme d'équilibre pour une force plus ou moins grande. C'est pourquoi, la notion de stabilité et d'instabilité dans le grand se trouve nécessairement liée à l'absence ou à la présence des influences externes correspondantes.

La stabilité dans le grand est une extension du schéma classique, son rapprochement à notre conception intuitive, fruit de notre observation quotidienne, sur la stabilité. Il s'agit de tout un complexe de propriétés d'un système et de perturbations agissant sur ce système. Aussi, l'analyse de toutes les formes possibles d'équilibre constitue tout au plus une partie de l'étude de la stabilité et n'épuise pas totalement le problème. L'on pourra s'en rendre compte grâce à la résolution de quelques problèmes qui vont suivre.

Revenons au schéma en question d'une barre comprimée et établissons les équations de la déformée pour de grands déplacements. Puisque nous aurons besoin de ces équations dans la suite, nous les établirons ici dans une forme quelque peu plus générale qu'il n'aurait fallu pour résoudre le problème étudié dans le cas présent.

La fig. 367 représente une partie d'une barre fortement incurvée par une force P. Introduisons deux systèmes de coordonnées : le système xy orienté d'après la tangente et la normale à la déformée dans l'encastrement, et le système $x'y'$ orienté selon la force P.

Désignons par δ l'angle entre la direction de la force et l'axe x (dans notre cas $\delta = 0$) ; ζ est l'angle courant entre la tangente à l'arc de la déformée et l'axe x'.

La courbure de la poutre en un point arbitraire s'exprimera, de toute évidence, au moyen de l'angle ζ de la manière suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\zeta}{ds},$$

ds étant un élément de l'arc de la poutre. Le moment fléchissant dans le point A est égal à

$$M_{fl} = P\,(y'_L - y'),$$

y'_L étant l'ordonnée du point L. Il est évident maintenant que

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{P}{EJ}\,(y'_L - y').$$

Fig. 367

Dérivons cette expression par rapport à s:

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\frac{P}{EJ}\,\frac{dy'}{ds}\,;$$

or

$$\frac{dy'}{ds} = \sin\zeta,$$

aussi,

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\frac{P}{EJ}\sin\zeta.$$

Introduisons les notations:

$$\frac{P}{EJ} = \frac{\beta^2}{l^2}. \qquad (1)$$

Alors,

$$l^2\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\beta^2\sin\zeta,$$

ou encore

$$l^2 d\left(\frac{d\zeta}{ds}\right) = -2\beta^2\sin\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\,ds.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\frac{d\zeta}{ds}$ et intégrons :

$$\left(l\,\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = 4\beta^2\left(C_1 - \sin^2\frac{\zeta}{2}\right). \qquad (2)$$

Désignons par k^2 la constante C_1 et $\sin \frac{\zeta}{2}$, par $k \sin \psi$, en d'autres mots,

$$\sin \frac{\zeta}{2} = k \sin \psi. \tag{3}$$

L'équation (2) prendra alors la forme suivante

$$l \frac{d\zeta}{ds} = 2\beta k \cos \psi. \tag{4}$$

Or, en vertu de (3),

$$\frac{d\zeta}{ds} = 2k \frac{\cos \psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} \frac{d\psi}{ds},$$

c'est pourquoi,

$$l \frac{d\psi}{ds} = \beta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}, \quad \beta \frac{ds}{l} = \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Intégrant cette expression, nous obtenons

$$\beta \frac{s}{l} = F(\psi) - F(\psi_0). \tag{5}$$

Ici, on a désigné par $F(\psi)$ l'intégrale elliptique de première espèce

$$F(\psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Les valeurs de cette intégrale s'obtiennent dans des tables en fonction de k et de ψ.

Déterminons maintenant l'équation de la déformée $x'(s)$ et $y'(s)$:

$$dx' = \cos \zeta \, ds, \quad dy' = \sin \zeta \, ds,$$

ou encore

$$dx' = \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\zeta}{2}\right) ds, \quad dy' = 2 \sin \frac{\zeta}{2} \cos \frac{\zeta}{2} \, ds.$$

Si dans ces expressions on fait la substitution

$$\sin \frac{\zeta}{2} = k \sin \psi,$$

on obtiendra

$$\frac{dx'}{l} = \frac{2}{\beta} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} \, d\psi - \frac{ds}{l},$$

$$\frac{dy'}{l} = \frac{2}{\beta} k \sin \psi \, d\psi.$$

Intégrons ces expressions de zéro à s:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x'}{l}&=\frac{2}{\beta}[E(\psi)-E(\psi_0)]-\frac{s}{l},\\ \frac{y'}{l}&=\frac{2}{\beta}k[\cos\psi_0-\cos\psi],\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

dans ces expressions on a désigné par $E(\psi)$ l'intégrale elliptique de seconde espèce

$$E(\psi)=\int_0^{\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

Les valeurs de cette fonction s'obtiennent également dans des tables.

Passant au système de coordonnées xy, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{l}&=\frac{x'}{l}\cos\delta+\frac{y'}{l}\sin\delta,\\ \frac{y}{l}&=\frac{y'}{l}\cos\delta-\frac{x'}{l}\sin\delta.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Passons maintenant aux conditions aux limites pour la barre étudiée. Pour $s = l$ nous avons: $M_{f1} = Pe\cos\zeta_L$. Par conséquent

$$\frac{d\zeta}{ds}=-\frac{Pe\cos\zeta_L}{EJ},$$

ou conformément à (1)

$$\frac{d\zeta}{ds}l=-\beta^2\frac{e}{l}\cos\zeta_L.$$

En vertu de l'expression (4), nous avons

$$2k\cos\psi_L=-\beta\frac{e}{l}\cos\zeta_L,$$

mais comme

$$\cos\zeta_L=1-2\sin^2\frac{\zeta_L}{2},$$

nous obtenons de (3):

$$\cos\zeta_L=1-2k^2\sin^2\psi_L.$$

Ainsi, nous aurons la *première* condition aux limites dans sa forme définitive suivante:

$$\text{pour}\quad s=l\quad 2k\cos\psi_L=-\beta\frac{e}{l}(1-2k^2\cos^2\psi_L).\qquad(8)$$

La *seconde* condition aux limites se présente comme suit:

$$\zeta=0\quad\text{pour}\quad s=0,\quad\text{ou d'après (3),}\quad\psi_0=0.$$

Pour $s = l$, l'expression (5) prend la forme suivante

$$F(\psi_L)=\beta.\qquad(9)$$

De (6), trouvons

$$\frac{x_L}{l}=\frac{x'_L}{l}=\frac{2}{\beta}E(\psi_L)-1.$$

Le rapprochement λ des extrémités de la barre sera

$$\lambda=2l-2x'_L,\quad \frac{\lambda}{l}=4\left[1-\frac{1}{\beta}E(\psi_L)\right].$$

La flèche maximale sera

$$f=y'_L=\frac{2l}{\beta}k(1-\cos\psi_L). \qquad (10)$$

Etablissons maintenant comment la force P dépend de la flèche maximale f pour un certain rapport donné $e/2l$. Nous ferons les calculs dans l'ordre suivant. Divisons terme à terme l'équation (8) par (9):

$$k\frac{\cos\psi_L}{F(\psi_L)}=-\frac{e}{2l}(1-2k^2\sin^2\psi_L). \qquad (11)$$

Fixons-nous, pour un $e/2l$ donné, une valeur de k et puis, dans les tables, choisissons ψ_L tel qu'il soit possible de satisfaire à l'équation (11). Ensuite, de (9), trouvons β et puis

$$\frac{P}{P_E}=\frac{P(2l)^2}{\pi^2EJ}=\frac{4\beta^2}{\pi^2}.$$

De l'équation (10) déterminons $\frac{f}{2l}$. Ainsi, nous obtenons un point de la fonction

$$\frac{P}{P_E}=\varphi\left(\frac{f}{2l}\right).$$

Prenons, en guise d'exemple, $e/2l = 0{,}02$ et composons une table, en posant $k = \sin 5°$, $\sin 10°$, . . .

k	ψ_L	β	$\frac{P}{P_E}$	$\frac{f}{2l}$
0,08716	118°	2,06	1,72	0,0620
0,1736	101°	1,778	1,28	0,118
0,259	97°	1,725	1,21	0,168
0,342	94°	1,694	1,156	0,216
0,707	90°	1,854	1,39	0,381

A la base de cette table, traçons la courbe représentée sur la fig. 368. Sur ce graphique, on a tracé également deux courbes. La première correspond au cas $e = 0$; la seconde qui commence au point $P/P_E =$ $= 4$, correspond à une incurvation de la barre selon la forme représentée sur la fig. 123, *b*.

Analysons le résultat obtenu. La courbe $e/2l = 0{,}02$ décroît sous de petites flexions et puis, à partir de $P/P_E = 1{,}14$ se met à croître. Dans le point B a lieu son intersection avec la courbe $e/2l = 0$. Ce

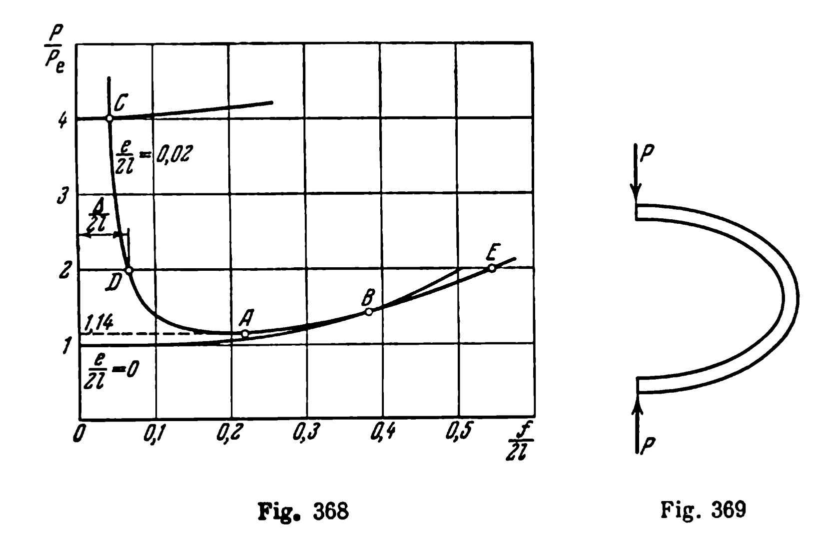


Fig. 368 Fig. 369

point est commun à toutes les courbes indépendamment de $e/2l$. Ici, $k = 1/\sqrt{2}$ et de l'équation (11) on déduit que pour un $e/2l$ quelconque, on aura $\cos\psi_L = 0$. Cela signifie que le moment à l'extrémité de la barre est nul et que l'extrémité frontale se retournera de 90° (fig. 369).

La courbe $e/2l = 0{,}02$ et l'axe des ordonnées ne se coupent pas. Dans sa partie gauche, la courbe se rapproche asymptotiquement de la droite $f/2l \approx 0{,}04$. Ainsi, pour $e/2l \neq 0$, la barre sera toujours stable dans le petit à condition qu'il s'agisse de la perte de stabilité selon la forme représentée sur la fig. 131, *c*. Mais, pour une force $P = 4\pi^2EJ/(2l)^2$, la barre deviendra, pour n'importe quel $e/2l$, instable selon la forme représentée sur la fig. 131, *b*.

Supposons maintenant que pour $e/2l = 0{,}02$ la barre est sollicitée par une force, par exemple,

$$P = \frac{2\pi^2EJ}{(2l)^2} \quad \left(\frac{P}{P_E} = 2\right).$$

Avec cela, la barre reste rectiligne. Essayons de la faire dévier, tant soit peu, de la verticale en lui conférant une certaine incurvation de l'axe. Si cette incurvation est petite, la barre, abandonnée à elle-même, va regagner sa position initiale. Mais si par contre l'incurvation est suffisamment grande (plus grande que $\Delta/2l$, fig. 368), la barre adoptera une nouvelle forme d'équilibre, curviligne, correspondant au point E (fig. 368).

En fonction de la déviation conférée, le système peut revenir à sa position initiale tout comme il peut ne pas y revenir. Mais cela n'aura lieu que pour une force P plus grande qu'une valeur déterminée. Pour $e/2l = 0{,}02$, cela se produira aussi bien pour $P > 1{,}14P_E$ (le point A sur la fig. 368) que pour $P < 4P_E$, quand la perte de stabilité survient indépendamment de la déviation communiquée. Ainsi, nous en arrivons à une autre notion d'intervalle des efforts critiques à l'intérieur duquel devient possible le passage à une nouvelle forme d'équilibre: $1{,}14P_E \leqslant P < 4P_E$.

Dans cet intervalle la perte de stabilité surviendra plus tôt ou plus tard en fonction de la perfection avec laquelle la barre a été fabriquée et, en fonction de ceci si l'on observe fidèlement le centrage lors de l'application de la force P. Mais quoi qu'il en soit, pour des systèmes semblables, les charges critiques dans l'intervalle indiqué se déterminent comme étant probables.

Pour $P \geqslant 4P_E$, le passage à une nouvelle forme d'équilibre devient inévitable.

138. En résolvant ce problème, il est indispensable de considérer isolément la forme d'équilibre (A) (fig. 370), pour laquelle l'extrémité

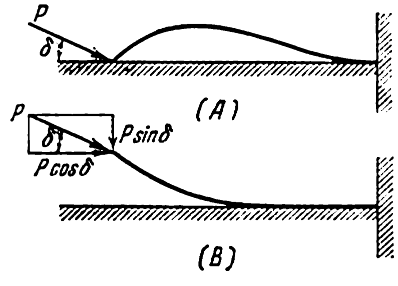


Fig. 370

de la poutre reste collée à la surface. Le passage de la forme rectiligne à cette forme d'équilibre se produira, comme on sait, avec une force longitudinale

$$P_{cr} \cos \delta = \frac{20{,}2EJ}{l^2}.$$

Examinons maintenant les formes d'équilibre de type (B) (fig. 370). Il est clair que le passage à une telle forme d'équilibre ne peut pas être réalisé au moyen d'une petite (aussi petite que l'on veut) déviation du système par rapport à sa position initiale. Effectivement, en communiquant à l'extrémité de la poutre une certaine déviation avec le dessein de ne pas la voir revenir à sa position initiale et de la faire adopter une forme de type (B), nous devons choisir cette déviation suffisamment grande pour que le moment créé par la force $P \cos \delta$, qui la dévie de sa position initiale, soit plus grand que celui créé par la force $P \sin \delta$ qui la fait revenir à sa position initiale. En d'autres mots, nous lui devons conférer un déplacement plus grand

qu'une certaine valeur donnée. Après cela, le système, laissé à lui-même, ne reviendra pas à sa position initiale.

Pour quelles conditions les formes d'équilibre de type (B) sont-elles possibles? Dans notre cas, la seule forme possible d'existence de la déformée est celle pour laquelle tous les points de la poutre

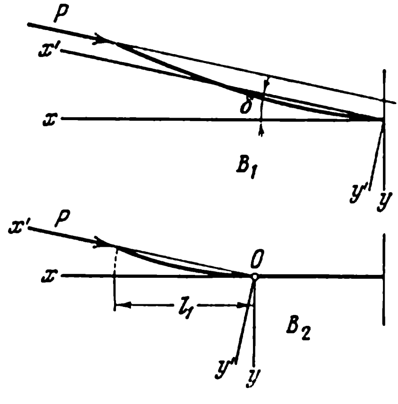


Fig. 371

incurvée vont se situer plus haut que la surface horizontale. Il y a ici deux possibilités: 1) l'incurvation s'étend sur la poutre toute entière (fig. 371, B_1), 2) l'incurvation s'étend sur une partie de la poutre (B_2).

Examinons le premier cas (B_1). A l'extrémité de la poutre pour $s = l$, la courbure est nulle ($d\zeta/ds = 0$). C'est pourquoi, de la formule (4) du problème précédent (p. 249), on déduit

$$\psi_L = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $s = 0$, nous avons $\zeta = -\delta$. De la formule (3) (p. 249), nous obtenons

$$-\sin\frac{\delta}{2} = k\sin\psi_0, \tag{1}$$

tandis que de (1) et de (5) (p. 249)

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EJ} = \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\psi_0)\right]^2. \tag{2}$$

Conformément à (6) (p. 250), les coordonnées de l'extrémité de la poutre dans le système $x'y'$ seront

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'_L}{l} &= 2\,\frac{E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E(\psi_0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\psi_0)} - 1, \\ \frac{y'_L}{l} &= \frac{2k\cos\psi_0}{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\psi_0)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Trouvons de la première expression (7) (p. 250) le déplacement horizontal du point d'application de la force :

$$\frac{\lambda}{l} = 1 - \frac{x'_L}{l} \cos \delta - \frac{y'_L}{l} \sin \delta. \tag{4}$$

On peut maintenant tracer, pour les formes d'équilibre (B_1), la courbe de dépendance de Pl^2/EJ par rapport à λ/l pour certaines valeurs de δ (10°, 20°, 30°). Pour ce faire, s'étant fixés des valeurs de k trouvons de (1) ψ_0. De (2) trouvons, en nous aidant des tables pour les intégrales elliptiques, Pl^2/EJ et, de (3) et (4), $\frac{\lambda}{l}$.

Sur la fig. 372 sont représentées trois courbes. En les traçant, on a tenu compte de ceci que pour la forme d'équilibre de type (B_1),

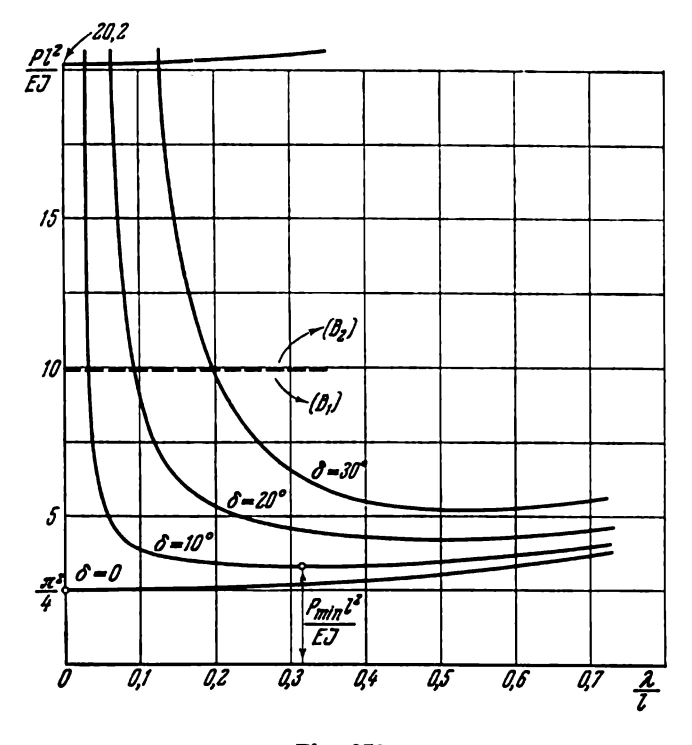


Fig. 372

la force P passe au-dessus de l'origine des coordonnées et ψ_0 reste plus grand que $-\pi/2$. La ligne en pointillé sur la fig. 372 indique la limite supérieure de ces courbes. Pour des valeurs de Pl^2/EJ plus grandes, la courbe de dépendance cherchée doit se déterminer conformément à la forme d'équilibre de type (B_2). Dans ce cas, au point O

(fig. 371), $\psi_0 = -\pi/2$ et à la place de (1), nous aurons

$$k = \sin\frac{\delta}{2}. \qquad (1')$$

A la place de (2), nous obtenons

$$\frac{Pl^2}{EJ}\frac{l_1^2}{l^2} = \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\psi_0)\right]^2. \qquad (2')$$

A la place de (3) et de (4), nous aurons

$$\frac{x_L'}{l}\frac{l}{l_1} = 2\,\frac{E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E(\psi_0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\psi_0)} - 1, \qquad (3')$$

$$\frac{y_L}{l_1} = 0,$$

$$\frac{\lambda}{l}\frac{l}{l_1} = 1 - \frac{x_L'}{l}\frac{l}{l_1}\cos\delta. \qquad (4')$$

De cette façon, nous trouverons k de (1′). Pour une certaine valeur arbitraire de Pl^2/EJ, de (2′) trouvons l_1/l, et de (3′) et (4′), nous obtiendrons λ/l. Les résultats des calculs sont représentés par les courbes qui, sur la fig. 372, se trouvent au-dessus de la ligne en pointillé.

Analysons les résultats obtenus. Si $\delta = 0$, on aura une perte de stabilité selon Euler pour

$$\frac{Pl^2}{EJ} = \frac{\pi^2}{4} \approx 2{,}46.$$

Pour $\delta \neq 0$ et pour $Pl^2/EJ < 20{,}2/\cos\delta$, il y aura perte de stabilité seulement dans le grand. La déviation qu'il faut communiquer à la poutre pour qu'elle passe à une nouvelle forme d'équilibre, diminue avec l'augmentation de la force P. Par ailleurs, la perte de stabilité (en fonction de δ) ne peut se produire pour une force plus petite qu'une valeur déterminée. C'est ainsi que pour

$$\delta = 10^\circ \quad \frac{P_{\min} l^2}{EJ} \approx 3{,}25,$$

$$\delta = 20^\circ \quad \frac{P_{\min} l^2}{EJ} \approx 4{,}25,$$

$$\delta = 30^\circ \quad \frac{P_{\min} l^2}{EJ} \approx 5{,}25.$$

Dans tous les cas P_{cr} se détermine comme étant probable dans l'intervalle

$$P_{\min} < P_{cr} < \frac{20{,}2EJ}{l^2\cos\delta},$$

avec cela $P_{\min} = f(\delta)$.

139. Le système est toujours stable par rapport à des perturbations infiniment petites.

Considérons le système dans une position inclinée (fig. 373). Désignons par R la force qui soumet la barre flexible à une compression. Après avoir égalé à zéro la somme des moments des forces par rapport au point O, nous aurons

$$P\cdot 2l\sin\varphi = R\cdot OA. \tag{1}$$

Utilisons ensuite la règle connue selon laquelle la somme des projections des segments d'une ligne polygonale est égale à la projection du segment qui ferme cette ligne, et projetons le quadrilatère

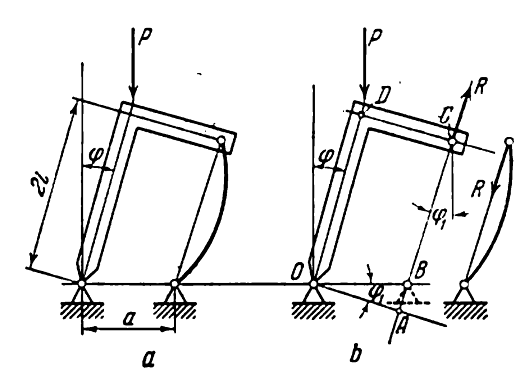


Fig. 373

fermé $ODCB$ sur l'axe vertical d'abord et l'axe horizontal ensuite. Nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} 2l\cos\varphi - a\sin\varphi &= BC\cdot\cos\varphi_1, \\ -a + 2l\sin\varphi + a\cos\varphi &= BC\cdot\sin\varphi_1, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

de là, nous aurons

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin\varphi - \frac{a}{2l}(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi - \frac{a}{2l}\sin\varphi}.$$

Trouvons, ensuite,

$$OA = a\cos\varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_1}} =$$

$$= a\,\frac{\cos\varphi - \frac{a}{2l}\sin\varphi}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{2l}\sin\varphi + 2\frac{a^2}{4l^2}(1-\cos\varphi)}}.$$

Ainsi, l'expression (1) prend la forme suivante

$$P=R\frac{a}{2l}\frac{\operatorname{cotg}\varphi-\frac{a}{2l}}{\sqrt{1-2\frac{a}{2l}\sin\varphi+2\frac{a^2}{4l^2}(1-\cos\varphi)}}. \qquad (3)$$

De toute évidence, le segment $BC = 2l - \lambda$, λ étant le rapprochement des extrémités de la barre flexible. Elevant au carré et additionnant les égalités (2), nous trouverons

$$1-\frac{\lambda}{2l}=\sqrt{1-2\frac{a}{2l}\sin\varphi+2\frac{a^2}{4l^2}(1-\cos\varphi)}. \qquad (4)$$

La force R qui figure dans l'expression (3) dépend de λ. Déterminons cette dépendance de l'équation d'une barre souple à laquelle ont été communiqués de grands déplacements (voir solution du problème 137). Pour $s = 0$, nous avons $d\zeta/ds = 0$, et de l'équation (4) (p. 249) $\psi_L = \pi/2$.

Pour $s = 0$, nous avons $\zeta = 0$ et de la formule (3) (p. 249), nous obtenons: $\psi_0 = 0$.

Le raccourcissement de la barre λ sera $\lambda = 2l - 2x$. De (6) (p. 250) trouvons

$$\frac{\lambda}{2l}=2\left[1-\frac{E\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\beta}\right].$$

De (5) (p. 249), nous obtenons

$$\beta=\sqrt{\frac{Rl^2}{EJ}}=F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Fixons quelques valeurs du module k des intégrales elliptiques et dans des tables trouvons $F(\pi/2)$ et $E(\pi/2)$ et, puis, β et $\lambda/2l$. Etablissons la table suivante:

$\arcsin k$	0	5°	10°	15°	20°	25°	30°
β	1,571	1,574	1,583	1,598	1,620	1,649	1,686
$\frac{\lambda}{2l}$	0	0,008	0,030	0,068	0,114	0,184	0,262
$\frac{R}{P_E}=\frac{4\beta^2}{\pi^2}$	1	1,004	1,015	1,036	1,062	1,102	1,153

Dans la dernière ligne de la table, on a donné le rapport entre la force R qui comprime la barre et la force d'Euler $P_E = \pi^2EJ/(2l)^2$. La courbe de dépendance

$$\frac{R}{P_E}=f\left(\frac{\lambda}{2l}\right)$$

est montrée sur le graphique de la fig. 374.

Fixons maintenant quelques valeurs de l'angle φ et, de l'équation (4), déterminons $\lambda/2l$ et puis, sur le graphique, trouvons R/P_E, après quoi, de l'équation (3), déterminons le rapport P/P_E. Ainsi, nous

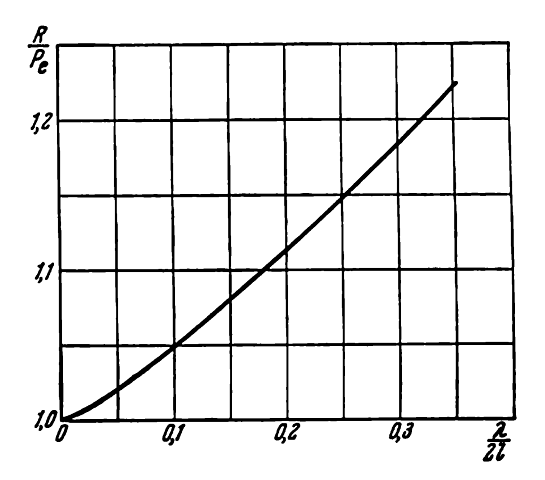


Fig. 374

obtenons la fonction $P/P_E = f(\varphi)$, dont la courbe est représentée sur la fig. 375. Le sens de cette courbe est le même que pour les

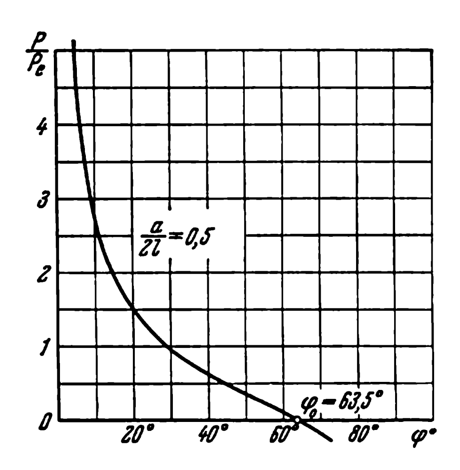


Fig. 375

courbes des fig. 368 et 372 obtenues lors de la résolution des deux problèmes précédents. Ici cependant, à la différence des cas étudiés plus haut, la courbe a un point d'intersection avec l'axe des abscisses. Cela signifie que même pour une force $P = 0$ le système peut passer

à une nouvelle forme d'équilibre si on lui communique une perturbation suffisamment grande. Pour $a/2l = 0{,}5$, nous avons $\varphi_0 = 63{,}5°$, ce qui correspond à l'emplacement des points OBC sur une même droite (fig. 376).

Pour une grande force P, la déviation qu'il faut conférer au système pour qu'il ne revienne pas à sa position initiale, sera petite.

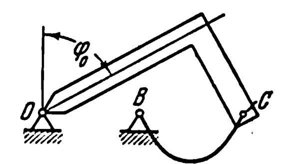


Fig. 376

Si la précision avec laquelle a été faite l'installation, ainsi que les forces extérieures agissant dans la suite sont telles qu'elles garantissent l'absence des angles d'inclinaison dépassant 5°, on peut affirmer, conformément au graphique, que la charge limite P que le système peut supporter sera plus grande que $5P_E$.

A la différence des problèmes 137 et 138 étudiés plus haut, la force critique n'a pas non plus de limite supérieure. Cela est dû au fait qu'on n'a pas tenu compte de la compressibilité d'une barre flexible. Si l'on en tient compte, il est aisé d'établir que le système devient instable par rapport à des perturbations infiniment petites pour

$$P = EF\frac{a^2}{4c^2},$$

F étant l'aire de la section de la barre flexible.

140. Avant la perte de stabilité, l'anneau se trouve sous l'action d'une sollicitation externe uniformément répartie $q = P/R$. Dans les conditions ordinaires, si au cours du processus de flexion de l'anneau q reste invariable, la perte de stabilité surviendra lorsque

$$q = \frac{3EJ}{R^3}.$$

Avec cela, l'anneau prend une forme proche de celle de l'ellipse.

Cependant, dans le présent problème l'anneau sera toujours stable dans le petit. En effet, si pour une raison quelconque l'anneau se met à s'incurver en adoptant au moins la forme d'une ellipse, la charge répartie $q = P/R$ va croître là où la courbure augmente et décroître là où cette courbure diminue. Sur les extrémités du grand axe, q croît tandis qu'aux extrémités du petit axe, q diminue (fig. 377). La différence entre ces charges fera que l'anneau reprenne sa forme circulaire.

Pour que l'anneau ne reprenne pas sa forme circulaire, il faut, de toute évidence, lui communiquer une incurvation suffisamment

grande telle que, sur un certain intervalle, l'anneau se trouve éloigné du fil. Avec cela, il sera beaucoup plus facile d'établir la forme de la déformée au moyen d'une expérience simple consistant à confectionner un anneau en papier et à le tendre ensuite par un fil fin ordinaire.

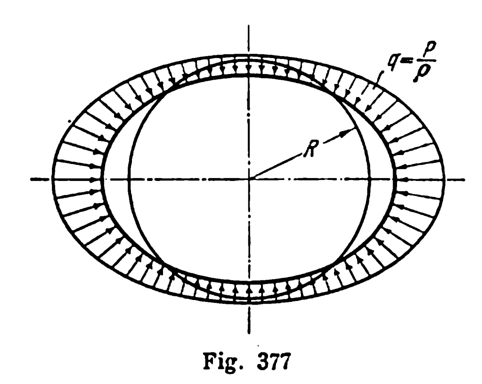


Fig. 377

A la fig. 378, on a montré la forme d'un anneau ayant perdu de stabilité.

Examinons la partie d'à droite de l'anneau après l'avoir sectionné au point où le fil se trouve en pente (fig. 379, point 1). Dans cette

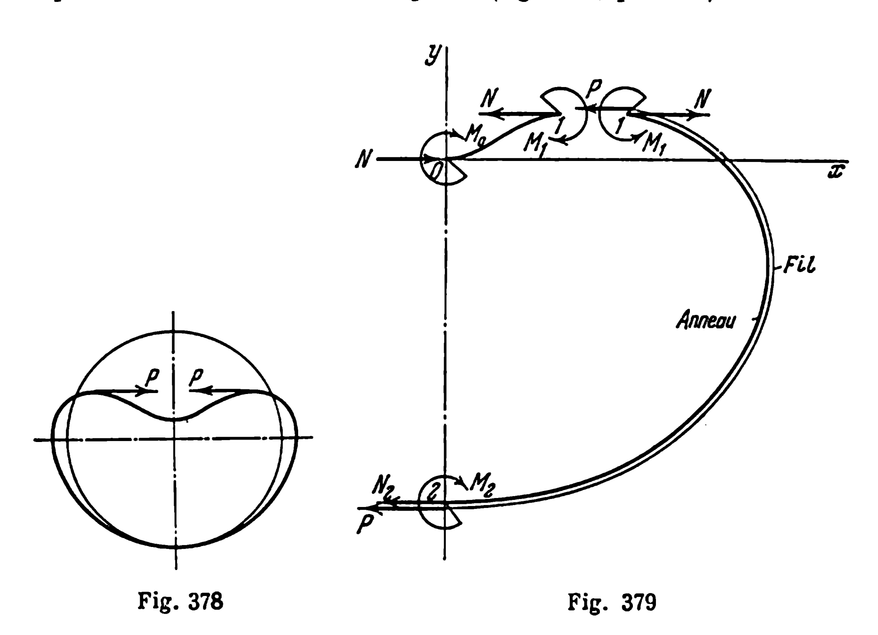


Fig. 378 Fig. 379

section de l'anneau apparaissent un moment fléchissant M_1 et une force normale de compression N. L'effort tranchant est, de toute

évidence, nul puisque s'il en était autrement, les conditions d'équilibre du tronçon *O1* de l'anneau ne seraient pas respectées.

Pour étudier les conditions d'équilibre de cette forme de l'anneau flexible, nous nous servirons des relations établies auparavant lors de la résolution du problème 137. Ces relations avaient été établies pour le cas d'une barre rectiligne flexible. Ici, par contre, nous avons à faire à un anneau de courbure constante $1/R$. Or, un anneau de courbure constante s'obtient d'une barre droite aux extrémités de laquelle on applique un moment $M = EJ/R$. Par conséquent, ce problème (et bien d'autres encore) de la flexion d'une poutre souple à la courbure initiale constante, se ramène au problème de la flexion d'une poutre droite, de mêmes longueur et rigidité, si l'on ajoute à la sollicitation donnée des moments $M = EJ/R$ appliqués à ses extrémités.

Désignons la longueur du tronçon *O1* par l_1. L'arc s, nous le compterons de *O* à *1*. L'expression (1) (p. 248) prendra pour le premier tronçon de l'anneau la forme suivante:

$$\beta = l_1 \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \tag{1}$$

Pour $s = 0$ et $s = l_1$, $\zeta_0 = \zeta_1 = 0$ et, conformément à (3) (p. 249), nous obtenons

$$\sin \psi_0 = 0, \quad \sin \psi_1 = 0.$$

Comme l'angle ψ croît tout au long de l'arc s, alors en passant, au point d'inflexion, par la valeur $\frac{\pi}{2}$ (voir problème 137), après avoir posé $\psi_0 = 0$, nous obtiendrons $\psi_1 = \pi$.

La courbure de la poutre au point *1* sera, conformément à (4) (p. 249),

$$\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)_1 = 2\frac{\beta}{l_1} k_1 \cos \psi_1,$$

ou

$$\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)_1 = -2k_1 \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \tag{2}$$

L'expression (5) de la p. 249 prendra, pour $s = l_1$, la forme suivante

$$l_1 \sqrt{\frac{N}{EJ}} = E_1(\pi) = 2F_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \tag{3}$$

où $F_1(\pi/2)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce pour un module k_1. (Pour le second tronçon, le module sera k_2.) Avec cela,

$$F\left(n\frac{\pi}{2}\right) = nF\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après l'expression (6) (p. 250), les coordonnées du point *1* seront

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{EJ}}} 2E_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - l_1, \tag{4}$$

$$y_1 = \frac{4k_1}{\sqrt{\frac{N}{EJ}}}. \tag{5}$$

Passons maintenant au deuxième tronçon de l'anneau : le tronçon *1-2*. L'anneau se trouve ici sous l'action d'une charge distribuée dont l'intensité est proportionnelle à la courbure de l'anneau. Il est connu que sous une charge uniformément répartie, le problème concernant les grands déplacements d'une barre se résout non pas au moyen des intégrales elliptiques données dans des tables, mais bien au moyen des intégrales ultra-elliptiques qui, elles, ne sont pas données dans des tables. Pour le cas présent, cependant, le problème est beaucoup plus simple. Etant donné que le fil est absolument souple, nous pouvons considérer le fil et l'anneau pris ensemble comme un seul anneau doté de la même rigidité EJ et supposer que sur le deuxième tronçon, au point *1*, sur l'anneau agissent une force de compression $N - P$ et un moment M_1. Et pour une telle charge le problème concernant les grands déplacements peut déjà être résolu en se servant des intégrales elliptiques.

Pour une telle approche au problème, la charge q agissant sur l'anneau de l'extérieur, devient un effort interne agissant et sur l'anneau et sur le fil. A propos, à partir du raisonnement précédent, on peut faire une conclusion assez générale, quoi que très peu connue, selon laquelle sous une charge répartie proportionnelle à la courbure d'une poutre déformée, le problème des grands déplacements se résout au moyen des intégrales elliptiques.

Comme sur le deuxième tronçon de l'anneau il n'y a pas de points d'inflexion et que, par conséquent, nulle part sur ce tronçon $d\zeta/ds$ ne devient égal à zéro, la valeur de C_1 dans l'expression (2) (p. 248) doit être plus grande que l'unité. Si, par contre, nous désignons, comme dans le problème 137, C_1 par k^2 et sin $\zeta/2$ par k sin ψ, nous aboutissons aux intégrales elliptiques avec un module plus grand que l'unité. Il n'existe pas de tables pour de telles intégrales. C'est pourquoi, les expressions (3)-(6) du problème 137 doivent subir des transformations.

Introduisons pour le second tronçon les notations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{k_2^2}, \\ \sin\frac{\zeta}{2} &= \sin\psi, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

l'équation (2) (p. 248) prendra alors la forme suivante

$$l_2 \frac{d\zeta}{ds} = \pm \frac{2\beta}{k_2} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \psi},$$

l_2 étant la longueur du second tronçon. Comme sur le second tronçon la courbure est négative, nous adopterons le signe moins:

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{2}{k_2} \sqrt{\frac{N-P}{EJ}} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \psi}. \tag{7}$$

Mettant ici à la place de $d\zeta/ds$ l'expression

$$\frac{2 \cos \psi}{\sin \frac{\zeta}{2}} \frac{d\psi}{ds},$$

obtenue de (6), nous trouverons

$$ds = \frac{k_2}{\sqrt{\frac{N-P}{EJ}}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \psi}}, \tag{8}$$

d'où

$$s = \frac{k_2}{\sqrt{\frac{N-P}{EJ}}} [F_2(\psi) - F_2(\psi_0)]. \tag{9}$$

Et puis, tout comme dans le problème 137,

$$dx = dx' = \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\zeta}{2}\right) ds,$$

$$dy = dy' = 2 \sin \frac{\zeta}{2} \cos \frac{\zeta}{2} ds.$$

Mettons ici $\sin \frac{\zeta}{2}$ tiré de (6) et ds tiré de (8). Nous obtiendrons alors:

$$dx = \frac{2}{k_2 \sqrt{\frac{N-P}{EJ}}} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \psi}\, d\psi - \left(\frac{2}{k_2^2} - 1\right) ds,$$

$$dy = \frac{2}{k_2 \sqrt{\frac{N-P}{EJ}}} \frac{k_2^2 \sin^2 \psi}{2 \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Après intégration, nous trouverons

$$x - x_0 = \frac{2}{k_2 \sqrt{\frac{N-P}{EJ}}} [E_2(\psi) - E_2(\psi_0)] - \left(\frac{2}{k_2^2} - 1\right) s, \tag{10}$$

$$y - y_0 = \frac{2}{k_2 \sqrt{\frac{N-P}{EJ}}} \left[\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \psi_0} - \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \psi}\right]. \tag{11}$$

Examinons maintenant les conditions aux limites pour le deuxième tronçon.

Au point *1*, c'est-à-dire au commencement du second tronçon, $\zeta_1 = 0$, tandis qu'à son extrémité (point *2*) $\zeta_2 = -180°$. D'après (6)

$$\sin\psi_1 = 0, \quad \sin\psi_2 = -1.$$

Nous prendrons $\psi_1 = 180°$, $\psi_2 = 270°$.

Comme $F\,(n\pi/2) = nF\,(\pi/2)$, de (9) nous obtenons pour l'extrémité du second tronçon

$$l_2 = \frac{k_2 F_2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{N-P}{EJ}}}. \tag{12}$$

Mettant dans l'équation (7) $\psi = 180°$, nous trouverons la courbure de l'anneau sur le second tronçon au point *1*

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{2}{k_2}\sqrt{\frac{N-P}{EJ}}.$$

La courbure ne présentera pas de discontinuité au point *1*. C'est pourquoi, nous allons égaler la courbure obtenue à celle qui avait été trouvée au point *1* du premier tronçon (2), c'est-à-dire

$$k_1\sqrt{\frac{N}{EJ}} = \frac{1}{k_2}\sqrt{\frac{N-P}{EJ}}. \tag{13}$$

La coordonnée x de l'extrémité du second tronçon est nulle tandis que la coordonnée d'origine de ce second tronçon doit coïncider avec celle de l'extrémité x_1 (4) du premier tronçon. C'est pourquoi, pour $s = l_2$, $x = 0$ et $x_0 = x_1$ (4) nous obtiendrons de (10)

$$-\frac{4}{\sqrt{\frac{N}{EJ}}} E_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + l_1 = \frac{2}{k_2\sqrt{\frac{N-P}{EJ}}} E_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{k_2^2} - 1\right) l_2. \tag{14}$$

De façon analogue, nous trouverons y, distance entre les points O et *2*,

$$y = \frac{4k_1}{\sqrt{\frac{N}{EJ}}} + \frac{2}{k_2\sqrt{\frac{N-P}{EJ}}}\left(1 - \sqrt{1-k_2^2}\right) \tag{15}$$

En excluant maintenant $\sqrt{N/EJ}$ et $\sqrt{(N-P)/EJ}$ des équations (3), (12), (13) et (14), nous obtiendrons alors

$$\frac{2}{k_2^2} E_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{k_2^2} - 1\right) F_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2k_1\left[F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2E_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{16}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{2k_1 F_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F_2\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{17}$$

Or, la somme des longueurs l_1 et l_2 est égale à la moitié de l'arc de l'anneau

$$l_1 + l_2 = \pi R,$$

d'où

$$\frac{l_1}{\pi R} = \frac{\frac{l_1}{l_2}}{1 + \frac{l_1}{l_2}}. \tag{18}$$

De (3) et (13), nous trouverons

$$\sqrt{\frac{NR^2}{EJ}} = \frac{2F_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi \frac{l_1}{\pi R}}, \tag{19}$$

$$\frac{PR^2}{EJ} = \frac{NR^2}{EJ}(1 - k_1^2 k_2^2). \tag{20}$$

Ainsi, les calculs s'effectueront dans l'ordre suivant.

Fixons une valeur de k_1 (ou une valeur de l'angle de module $\alpha_1 = \arcsin k_1$) et en nous servant des tables des intégrales elliptiques complètes, choisissons k_2 tel que l'équation (16) soit satisfaite. Il est pratiquement beaucoup plus commode de faire ça en construisant à la fois les graphiques de dépendance entre le premier et le deuxième membres de l'équation et k_1 et k_2.

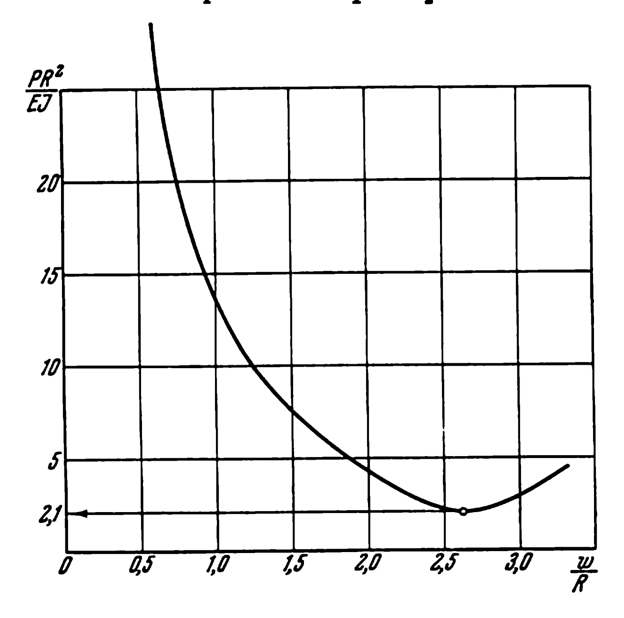


Fig. 380

Trouvons de (17) et (18) $l_1/\pi R$ et de (19) et (20) la valeur de la force P (20). La flèche w correspondant à cette force (la diminution du diamètre vertical) sera, conformément à (15),

$$w = 2R - y,$$

$$\frac{w}{R} = 2 - \frac{1}{\sqrt{\frac{NR^2}{EJ}}}\left[\frac{2}{k_1 k_2^2}\left(1-\sqrt{1-k_2^2}\right) - 4k_1\right]. \tag{21}$$

De cette façon, on détermine un point de la fonction

$$\frac{PR^2}{EJ} = f\left(\frac{w}{R}\right).$$

Sur la fig. 380 on a montré les résultats des calculs sous forme d'une courbe rappelant celles qui avaient été obtenues dans les trois problèmes précédents. La valeur minimale de la force critique est égale à

$$P_{\min} = 2{,}1\,\frac{EJ}{R^2}.$$

Cependant, cette valeur n'est la plus petite que du point de vue purement formel puisque le déplacement $\frac{w}{R}$ est, avec cela, égal à 2,65; en d'autres mots, la diminution du diamètre de l'anneau se trouve plus grande que le diamètre lui-même. Le contour de l'anneau prend la forme de la courbe montrée sur la fig. 381.

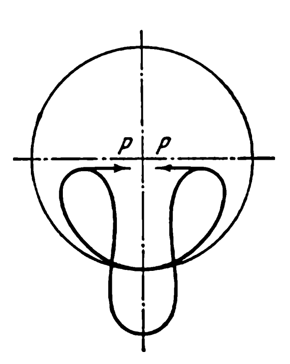


Fig. 381

Il est clair que dans des conditions réelles, les déformations initiales de l'anneau par rapport à sa forme circulaire sont très petites; en d'autres mots, w/R reste sensiblement plus petit que l'unité. Pour de petites valeurs de w/R, les calculs donnent des valeurs nettement élevées de PR^2/EJ ne pouvant pas trouver de place sur le dessin avec l'échelle qu'on a employée pour construire la courbe de la fig. 380. Dans ce cas, il est commode de transformer les formules établies en tenant compte du fait que k_1 et k_2 sont des grandeurs petites. Avec cela,

$$F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{4} + \ldots\right),$$

$$F_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k_2^2}{4} + \ldots\right).$$

En vertu de (17), (18), (19) et (20),

$$\frac{l_1}{l_2} \approx 2k_1, \quad \frac{l_1}{2\pi} \approx \frac{2k_1}{1+2k_1}, \quad \sqrt{\frac{NR^2}{EJ}} \approx \frac{1+2k_1}{2k_1},$$

$$\frac{PR^2}{EJ} \approx \frac{1+4k_1}{4k_1^2}. \tag{22}$$

Enfin,

$$\frac{w}{R}=2-\frac{2k_1}{1+2k_1}\left[\frac{2}{k_1k_2^2}\left(1-1+\frac{k_2^2}{2}\right)-4k_1\right],$$

$$\frac{w}{R}\approx 4k_1. \tag{23}$$

Ainsi, pour de petits $\frac{w}{R}$, nous obtenons en excluant k_1 de (22) et de (23)

$$\frac{PR^2}{EJ}\approx 4\,\frac{1+\frac{w}{R}}{\left(\frac{w}{R}\right)^2}\approx\frac{4}{\left(\frac{w}{R}\right)^2}.$$

Revenant à la notion de stabilité dans le grand qu'on a exposée à la page 247, nous voyons que, en définitive, le problème étudié n'a, à proprement parler, pas trouvé de solution. On a seulement trouvé des formes d'équilibre dont l'analyse montre que l'anneau est « très stable ». Pour juger de la stabilité du système, il faut tenir compte de la classe des perturbations existant dans la réalité et limitées d'une façon raisonnable; il faut aussi tenir compte des types d'imperfections initiales qui se présentent sous forme de faussage de l'anneau et d'inhomogénéité du matériau dont est fabriqué l'anneau. Jusqu'à présent, une telle analyse n'a pu être réalisée dans aucun problème.

Dans ce sens, l'exemple étudié ne constitue pas une exception. La théorie de la stabilité des systèmes élastiques n'est pas encore en mesure de donner, par exemple, une solution satisfaisante des problèmes d'une extrême importance du point de vue pratique, tels le problème de la stabilité d'une coque sphérique se trouvant sous l'action d'une pression externe et celui de la stabilité d'une coque cylindrique soumise à une compression axiale.

141. De par son essence, le problème s'apparente au problème précédent. Examinons, pour commencer, les formes d'équilibre de l'anneau pour de grands déplacements.

Supposons que le rayon de l'anneau dans son état libre est plus grand que le rayon de la frette d'une quantité égale à Δ. L'arc ABC (fig. 382) a pour forme hypothétique d'équilibre $AB'C'$. Le point B passe au point B' tandis que C, au point C'. De la condition d'égalité des arcs AB et AB', établissons le lien entre les angles φ_0 et φ_1:

$$\varphi_1=\pi-\frac{1}{1-e}(\pi-\varphi_0), \tag{1}$$

où l'on a désigné e par $e=\frac{\Delta}{R}$.

Examinons maintenant les équations d'une barre flexible (voir problème 137, p. 248). Sur le tronçon $C'B'$, nous aurons une forme rappelant un pli. Prenons le point C' pour l'origine de l'arc s. Il variera de zéro jusqu'à $l=R\varphi_0$. C'est pourquoi, l'expression (1) (page 248) prend la forme suivante

$$\beta^2=\frac{PR^2}{EJ}\varphi_0^2. \tag{2}$$

Au point C' l'angle d'inclinaison de l'arc $\zeta = 0$. Par conséquent, $\sin \psi_0 = 0$. Posons $\psi_0 = 0$. L'angle elliptique ψ va croître tout au long de l'arc s. Au point d'inflexion (comme il ressort de l'expression

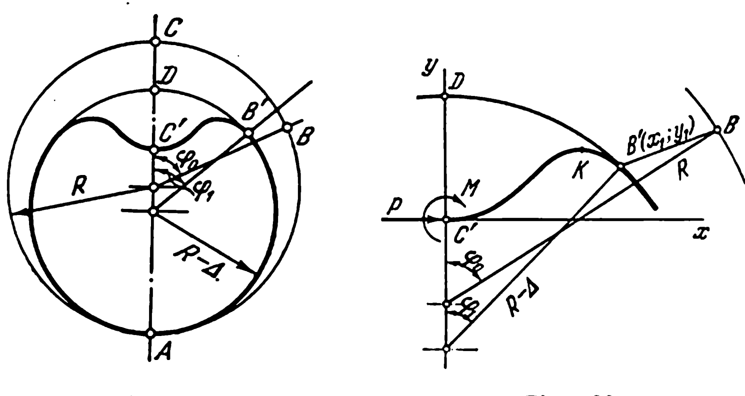


Fig. 382 Fig. 383

(4), p. 249), cet angle est égal à $\pi/2$. Au point K (fig. 383), il deviendra égal à π. Puisque sur l'intervalle KB', il n'y a plus de points d'inflexion, l'angle ψ restera au point B' plus petit que $3\pi/2$. Désignons-le par ψ_1. Après substitution de $s = l$, nous obtenons de l'équation (5) (p. 249)

$$\beta = F(\psi_1). \tag{3}$$

Au point B' la courbure de l'anneau est connue. Elle est égale à la courbure de la frette, c'est-à-dire

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{R-\Delta}.$$

L'équation (4) (p. 249) donne

$$-\frac{R\varphi_0}{R-\Delta} = 2\beta k \cos \psi_1. \tag{4}$$

Enfin, l'angle d'inclinaison de la courbe au point B' est donné:

$$\xi_B = -\varphi_1.$$

Nous obtenons alors de l'équation (3) (p. 249)

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi-\varphi_0}{1-e}\right) = k \sin \psi_1. \tag{5}$$

Les équations (6) (p. 250) donnent les valeurs des coordonnées du point B' dans le système des axes x, y (fig. 383):

$$\frac{x_1}{R\varphi_0} = \frac{2}{\beta} E(\psi_1) - 1, \tag{6}$$

$$\frac{y_1}{R\varphi_0} = \frac{2k}{\beta}(1 - \cos \psi_1). \tag{7}$$

Comme on le voit à la fig. 383,

$$x_1 = (R - \Delta) \sin \varphi_1$$

C'est pourquoi, nous obtenons encore une équation:

$$\frac{1-e}{\varphi_0} \sin \frac{\pi - \varphi_0}{1-e} = \frac{2}{\beta} E(\psi_1) - 1. \tag{8}$$

Dans les équations (3), (4), (5) et (8), on a pour inconnues : le module k des intégrales elliptiques, l'angle elliptique ψ_1, l'angle φ_0 et la force P. Ils doivent être déterminés en fonction de $e = \Delta/R$. Pour commencer, excluons β de l'équation (4) à l'aide de (3):

$$-\frac{\varphi_0}{1-e} = 2k \cos \psi_1 F(\psi_1). \tag{9}$$

Et puis, des équations (5) et (8), nous obtenons

$$-\frac{1-e}{\varphi_0} 2k \sin \psi_1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_1} = \frac{2E(\psi_1)}{F(\psi_1)} - 1.$$

Eliminons, à l'aide de l'équation (9), $(1 - e)/\varphi_0$. Alors

$$\cos \psi_1 [2E(\psi_1) - F(\psi_1)] - \sin \psi_1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_1} = 0. \tag{10}$$

Dans cette expression figurent seulement deux inconnues k et ψ_1. En s'aidant des tables des intégrales elliptiques, on peut, à la base de l'équation (10), constituer la table auxiliaire suivante.

k	ψ_1	$\sin \psi_1$	$\cos \psi_1$	$F(\psi_1)$	$E(\psi_1)$
0	4,493	−0,9761	−0,2172	4,494	4,494
0,05	4,493	−0,9761	−0,2174	4,497	4,491
0,10	4,493	−0,9760	−0,2178	4,504	4,482
0,15	4,492	−0,9759	−0,2184	4,517	4,469
0,20	4,491	−0,9756	−0,2194	4,536	4,449
0,25	4,490	−0,9753	−0,2207	4,559	4,422
0,30	4,488	−0,9749	−0,2224	4,590	4,391
0,35	4,486	−0,9744	−0,2246	4,626	4,352
0,40	4,482	−0,9738	−0,2274	4,670	4,307
0,45	4,479	−0,9730	−0,2310	4,723	4,255
0,50	4,475	−0,9719	−0,2355	4,784	4,196
0,55	4,469	−0,9704	−0,2414	4,856	4,129
0,60	4,461	−0,9685	−0,2492	4,940	4,052
0,65	4,449	−0,9656	−0,2599	5,038	3,965
0,70	4,433	−0,9613	−0,2757	5,152	3,866
0,75	4,407	−0,9538	−0,3003	5,281	3,750
0,80	4,361	−0,9390	−0,3439	5,421	3,612
0,85	4,259	−0,8989	−0,4382	5,530	3,427
0,90	3,843	−0,6451	−0,7641	5,313	3,000

Revenons, ensuite, à l'équation (8) qui, après substitution de β, prendra la forme suivante

$$\frac{1-e}{\varphi_0} \sin \frac{\pi-\varphi_0}{1-e} = 2 \frac{E(\psi_1)}{F(\psi_1)} - 1. \tag{11}$$

En se servant de cette table, calculons d'après l'équation (9) et pour un e donné, la valeur de l'angle φ_0 et puis, choisissons k tel que l'é-

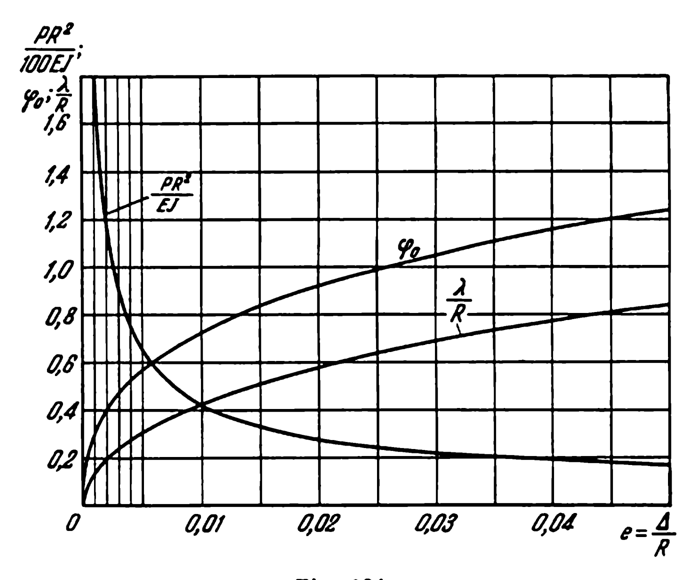


Fig. 384

quation (11) soit satisfaite. Enfin, des expressions (2) et (3), trouvons PR^2/EJ.

La valeur de la flèche λ au point C' se détermine au moyen du segment $C'D$ (fig. 383) et, de toute évidence, est égale à

$$\lambda = y_1 + (R - \Delta)(1 - \cos \varphi_1),$$

ou, en vertu des expressions (1), (3) et (7),

$$\frac{\lambda}{R} = \frac{2k}{F(\psi_1)} (1 - \cos \psi_1) + (1-e) \left(1 + \cos \frac{\pi - \varphi_0}{1-e}\right).$$

Portons les résultats des calculs sur le graphique représenté à la fig. 384. Ce graphique reflète les conditions d'existence d'une forme d'équilibre d'un anneau incompressible placé dans une frette rigide.

La condition d'incompressibilité qu'on a assumée tacitement dans l'analyse faite plus haut, fait sentir son influence sur l'allure des

courbes obtenues. Nous voyons que la forme d'équilibre de l'anneau existe toujours quand l'anneau se trouve détaché de la frette, c'est-à-dire pourvu seulement que la valeur de Δ soit différente de zéro. En

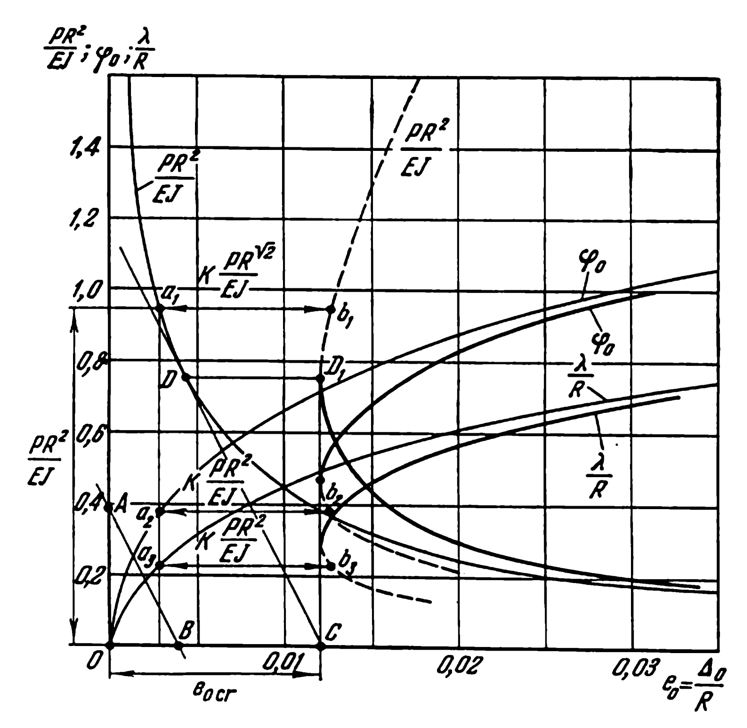


Fig. 385

réalité, il n'en est bien sûr pas ainsi. La différence, petite, entre les longueurs de l'anneau et du périmètre de la frette s'obtient grâce à la compression de l'anneau. La solution obtenue pour les formes d'équilibre reste valable et pour le cas d'un anneau comprimé. Tout simplement il faudra comprendre par la valeur Δ non seulement la différence entre les rayons de l'anneau et de la frette, mais bien la même valeur diminuée d'une contraction due aux forces normales agissant dans l'anneau.

Si en simplifiant on suppose que la force de compression est la même pour tous les points de l'anneau et est égale à P, nous aurons

$$\frac{\Delta_0}{R} = \frac{\Delta}{R} + \frac{P}{EF},$$

ou

$$\frac{\Delta_0}{R} = \frac{\Delta}{R} + \frac{PR^2}{EJ} K, \tag{12}$$

$$K = \frac{J}{R^2F}. \tag{13}$$

Ici, sous Δ on comprend la différence entre les rayons, laquelle est compensée par le retrait de l'anneau par rapport à la frette et cela, sans changement de la longueur de l'anneau, tandis que sous Δ_0 on comprend la différence initiale réelle entre les rayons.

De l'expression (12) on voit que, pour tenir compte de la compressibilité de l'anneau, il faut sur la fig. 384 déplacer chaque point du graphique à droite d'une valeur $\frac{PR^2}{EJ}$ K et reconstituer les paramètres PR^2/EJ, φ_0 et λ/R en fonction de Δ_0/R. Cela apporte des changements qualitatifs dans l'allure des courbes et leur confère une nouvelle interprétation. Ces courbes sont reconstruites à la fig. 385. Ici, la valeur de K est donnée et les trois courbes PR^2/EJ, φ_0 et λ/R restent les mêmes que sur la fig. 384. Elles sont tracées en lignes fines. Prenons sur la courbe PR^2/EJ un point arbitraire. En portant le segment KPR^2/EJ à droite, à partir du point a_1, nous obtenons le point b_1. De la même façon se déterminent les points b_2 et b_3. Le point a_1 se déplace ensuite et, par là, s'obtiennent de nouveaux points b_1, b_2 et b_3. Ainsi, point par point, on trace de nouvelles courbes PR^2/EJ, φ_0 et λ/R. Chacune de ces courbes a son extremum pour une seule et même valeur $e_0 = e_{0cr}$. Les nouvelles courbes sont tracées en lignes grasses.

Pour $e_0 < e_{0cr}$, l'anneau en compression n'aura pas de formes d'équilibre avec une partie voilée, détachée de la frette. Pour $e_0 > > e_{0cr}$, nous avons à la fois deux formes nouvelles: une, stable et une autre, instable. Les tronçons qui caractérisent la forme stable sont, sur les courbes, tracés en lignes continues.

Pour la détermination de la valeur critique $e_{0cr} = \Delta_{0cr}/R$, il n'est pas nécessaire de construire des courbes. Elle peut être trouvée de façon bien plus simple. Prenons sur l'axe des ordonnées un point arbitraire B et menons la droite AB de telle sorte que la tangente de l'angle OAB soit égale à K. Puis, parallèlement à la droite AB, menons une tangente à la courbe PR^2/EJ. Nous obtenons la droite CD. Le point C donne justement la valeur cherchée de e_{0cr}. En effet, en dérivant Δ_0/R (12) par rapport à PR^2/EJ et, en égalant la dérivée à zéro, nous trouverons

$$\frac{d\frac{\Delta}{R}}{d\frac{PR^2}{EJ}} = -K.$$

Ainsi, l'extremum a lieu pour une telle valeur de PR^2/EJ pour laquelle la tangente de l'angle formé par la tangente et l'axe des ordonnées est égale à $-K$. C'est ainsi que se détermine le point D. Le segment DD_1 est égal à KPR^2/EJ. En l'additionnant avec Δ/R (voir (12)), nous trouverons la valeur cherchée de e_{0cr}.

Le mode de construction qu'on vient de décrire, doit, pour un K donné, être réalisé sur le graphique de la fig. 384 où les courbes sont tracées avec une stricte observation de l'échelle.

Pour des valeurs de K très petites, c'est-à-dire pour un anneau à parois relativement minces, la détermination de e_{0cr} d'après le graphique n'est pas possible. Ici, on a intérêt à simplifier les équations établies plus haut en se servant du fait que le module k des intégrales elliptiques, qui diminue simultanément avec la valeur de K, est petit. Ainsi, pour un k petit, nous avons

$$F(\psi_1) = \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \approx \int_0^{\psi_1} \left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\psi\right) d\psi,$$

$$E(\psi_1) = \int_0^{\psi_1} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\psi \approx \int_0^{\psi_1} \left(1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\psi\right) d\psi.$$

Après intégration, nous obtenons

$$F(\psi_1) = \psi_1 + \frac{k^2}{4}(\psi_1 - \sin\psi_1\cos\psi_1),$$

$$E(\psi_1) = \psi_1 - \frac{k^2}{4}(\psi_1 - \sin\psi_1\cos\psi_1).$$

L'angle ψ_1 diffère peu de $3\pi/2$. Posons $\psi_1 = 3\pi/2 - \varepsilon$, ε étant une grandeur infime. Alors,

$$\sin\psi_1 = -1\,; \qquad \cos\psi_1 = -\varepsilon\,;$$

$$F(\psi_1) = \frac{3\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}\right); \quad E(\psi_1) = \frac{3\pi}{2}\left(1-\frac{k^2}{4}\right);$$

de l'équation (10) obtenons maintenant $\varepsilon = 2/3\pi$. L'équation (9) prend la forme suivante

$$\varphi_0 = 2k\varepsilon\frac{3\pi}{2} = 2k.$$

Mettons, dans l'expression (11), $\sin\frac{\pi-\varphi_0}{1-e}$ sous la forme suivante

$$\sin\frac{\pi-\varphi_0}{1-e} = \cos\varphi_0\sin\pi(1+e) - \sin\varphi_0\cos\pi(1+e),$$

ou

$$\sin\frac{\pi-\varphi_0}{1-e} = -\pi e + \varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{6}.$$

L'équation (11) donne en définitive $e = \frac{2}{3\pi}k^3$ et, par conséquent,

$$\varphi_0 = 2\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}e}.$$

En vertu des expressions (2) et (3), nous aurons

$$\frac{PR^2}{EJ} = \frac{F^2(\psi_1)}{\varphi_0^2},$$

d'où

$$e = \frac{9\pi^2}{32}\left(\frac{PR^2}{EJ}\right)^{-3/2}.$$

L'expression (12) pour Δ_0/R prend la forme suivante:

$$\frac{\Delta_0}{R} = \frac{9\pi^2}{32}\left(\frac{PR^2}{EJ}\right)^{-3/2} + K\frac{PR^2}{EJ} ;$$

Δ_0/R prend sa valeur minimum pour

$$\frac{PR^2}{EJ} = \left(\frac{27\pi^2}{64K}\right)^{2/5}$$

et devient égal à

$$e_{0\,\mathrm{cr}} = \frac{1}{4}K^{3/5}(9\pi^2)^{2/5}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-3/5} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2/5}\right],$$

ou

$$e_{0\,\mathrm{cr}} \approx 2{,}9K^{3/5}.$$

Pour un anneau de section rectangulaire $b \times h$,

$$K = \frac{h^2}{12R^2},$$

c'est pourquoi,

$$e_{0\,\mathrm{cr}} = 0{,}65\left(\frac{h}{R}\right)^{6/5}. \tag{14}$$

e_0 peut être interprété aussi comme un allongement thermique. Alors,

$$e_{0\,\mathrm{cr}} = \alpha t_{\mathrm{cr}} = 0{,}65\left(\frac{h}{R}\right)^{6/5}.$$

Il est curieux de souligner que dans le problème étudié le degré d'influence de la relation h/R sur les charges critiques est moins élevé que dans le problème ordinaire de la stabilité d'un anneau.

Nous référant à la pression de contact entre l'anneau et la frette, nous obtiendrons

$$q = \frac{\Delta_0}{R}\,\frac{EF}{R},$$

de là

$$q_{\mathrm{cr}} = 0{,}65Eb\left(\frac{h}{R}\right)^{11/5}.$$

Par contre, pour le cas habituel d'un anneau sollicité par des forces normales ou des forces centrées (voir problème 130), la valeur critique de q se détermine au moyen du rapport J/R^3, c'est-à-dire au moyen du rapport h/R élevé à la troisième puissance. C'est pourquoi, l'anneau est doté d'une grande stabilité lorsqu'il se trouve dans un « encadrement » rigide.

142. Il est impossible de donner à la question posée une réponse univoque. Examinons le processus de translation de la barre. L'équation ordinaire de la stabilité

$$M = EJy'' = -Py$$

se complique maintenant par l'introduction des forces inertiales transversales d'intensité q pour prendre la forme suivante

$$EJy^{(IV)} = -Py'' + q.$$

Or,

$$q = -\frac{\gamma F}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

γ étant le poids spécifique du matériau de la barre, F, l'aire d'une section transversale. Nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{\gamma F}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \qquad (1)$$

Posons

$$y = \sum T_m \sin\frac{m\pi x}{l},$$

où T_m représente certaines fonctions du temps t.

Mettons cette expression dans l'équation (1). Nous obtiendrons alors

$$\frac{\gamma F}{g}\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \frac{\pi^4 EJ}{l^4} m^2 (m^2 - \eta^2) T_m = 0, \qquad (2)$$

avec

$$\eta^2 = \frac{P}{\dfrac{\pi^2 EJ}{l^2}}.$$

Dans notre cas, $\eta^2 = 10$.

Si $m^2 > \eta^2$, l'équation (2) se résout au moyen des fonctions trigonométriques, ce qui correspond aux oscillations périodiques de la barre.

Si $m^2 < \eta^2$, l'équation (2) se résout au moyen des fonctions exponentielles

$$T_m = A_m e^{k_m t} + B_m e^{-k_m t},$$

avec

$$k_m = \sqrt{\frac{\pi^4 EJg}{\gamma F l^4} m^2 (\eta^2 - m^2)},$$

tandis que m prend trois valeurs entières 1, 2, 3.

Naturellement, seuls nous intéressent les termes ayant un accroissement illimité dans le temps. C'est pourquoi, l'on peut écrire

$$y = A_1 e^{k_1 t} \sin\frac{\pi x}{l} + A_2 e^{k_2 t} \sin\frac{2\pi x}{l} + A_3 e^{k_3 t} \sin\frac{3\pi x}{l}.$$

L'exposant de l'exponentielle k_m qui caractérise la vitesse d'accroissement d'une forme quelconque dépend de la valeur de m. Pour $m = 1, 2, 3$ et $\eta^2 = 10$, la grandeur $m^2(\eta^2 - m^2)$ qui figure dans l'expression sous le radical de k_m prend respectivement les valeurs 9, 24 et 9. Ainsi, la vitesse d'accroissement des flèches pour la forme de flexion selon deux demi-ondes se trouve plus grande que pour la forme de flexion selon une ou trois demi-ondes. C'est là, sans doute, la seule affirmation sûre que nous pouvons faire en liaison avec la question posée.

C'est que nous ne savons rien des valeurs A_1, A_2 et A_3 qui caractérisent la courbure initiale de la barre. Même si l'on considère ces paramètres comme statistiquement équivalents, la solution obtenue, dans ce cas, du problème linéaire ne nous renseigne pas encore sur le comportement de la barre dans la phase des grands déplacements. Si par ailleurs nous poussons plus loin notre étude et essayons d'analyser le comportement de la barre pour de grands déplacements, nous constaterons que, malgré tout, il nous manque des données de base pour avoir une solution complète du problème.

En effet, que cela veut dire: « D'après quelle forme s'incurvera la barre? ». De toute évidence, il faut d'abord se convenir sur les questions suivantes: où se termine le déroulement du mouvement? qu'est-ce qui limite le déplacement vertical de l'extrémité supérieure de la barre? ou quelle est la durée de l'action de la force? Mais toutes ces questions nous emmèneraient très loin.

143. Le problème proposé ici touche de nouveau des questions de principe sur la stabilité des systèmes élastiques et sa solution conduit à la nécessité de donner une nouvelle formulation du critère de stabilité.

Représentons-nous que la barre ait un peu dévié de sa position initiale d'équilibre (fig. 386).

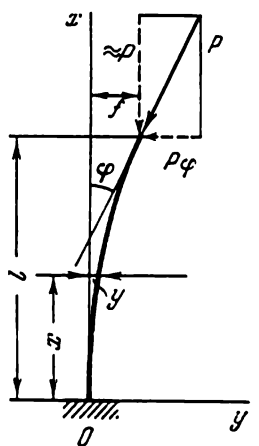


Fig. 386

L'équation de la déformée sera

$$EJy'' = P(f - y) - P\varphi(l - x),$$

d'où

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + f - \varphi(l - x),$$

avec $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$.

Pour $x = 0$, $y = 0$ et $y' = 0$.
Pour $x = l$, $y = f$ tandis que $y' = \varphi$.

Pour satisfaire à ces conditions, nous obtenons quatre équations:

$$B + f - \varphi l = 0, \qquad A\alpha + \varphi = 0,$$
$$A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0, \quad A \cos \alpha l - B \sin \alpha l = 0.$$

Examinant les deux dernières équations, il est aisé d'établir que, indépendamment du choix de αl, les constantes A et B sont nulles puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha l & \cos \alpha l \\ \cos \alpha l & -\sin \alpha l \end{vmatrix}$$

ne l'est pas. Or, si $A = B = 0$, la seule forme d'équilibre qui reste possible pour la barre est la forme initiale rectiligne.

Dans tous les problèmes qu'on a traités plus haut, on avait constamment identifié deux notions : « perte de stabilité » et « existance des formes d'équilibre, autres que la forme initiale ». C'est pourquoi, dans le problème présent, nous nous trouvons devant un choix :

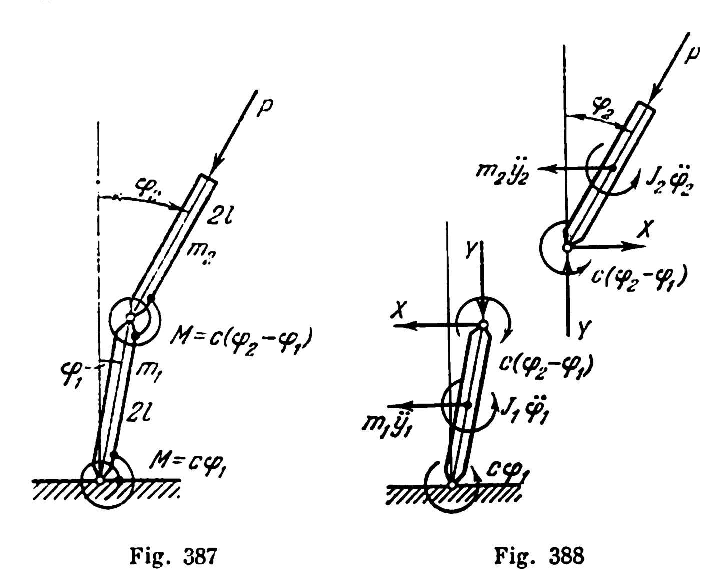


Fig. 387 Fig. 388

ou renoncer à cette identification familière profondément enracinée desdites notions ou bien accepter que le système reste stable pour n'importe quelles valeurs de la force P.

C'est cette première notion qui est juste. La forme initiale d'équilibre ne reste stable que jusqu'à une certaine valeur de la force P. Pour une force dépassant cette valeur, que nous appellerons toujours critique, a lieu le passage, non pas à une nouvelle forme d'équilibre, mais bien à une certaine forme de mouvement avec une déviation croissante par rapport à la position initiale d'équilibre. La condition d'apparition de cette forme de mouvement sert de critère de stabilité et porte le nom de critère dynamique de stabilité.

Examinons le modèle mécanique suivant représenté sur la fig. 387. Deux barres homogènes ayant des masses m_1 et m_2 sont reliées entre elles par un ressort de rigidité c. Un ressort identique relie la barre

inférieure à un appui articulé. La ligne d'action de la force P coïncide constamment avec la direction de l'axe de la barre supérieure.

Prenons pour coordonnées généralisées les angles de rotation des barres φ_1 et φ_2. Les déplacements des centres des masses de chaque barre seront alors

$$y_1 = l\varphi_1, \quad y_2 = 2l\varphi_1 + l\varphi_2,$$

$2l$ étant la longueur de chaque barre.

Les moments d'inertie par rapport aux axes centraux d'une section transversale de chaque barre seront respectivement égaux à

$$J_1 = \frac{m_1 l^2}{3} \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{m_2 l^2}{3}.$$

Introduisant les forces d'interaction dans l'articulation (fig. 388), établissons les équations de mouvement.

Pour la barre supérieure,

$$\left. \begin{aligned} Y = P, \quad X = P\varphi_2 + m_2\ddot{y}_2, \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + m_2\ddot{y}_2 l + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

Pour la barre inférieure,

$$c\varphi_1 + J_1\ddot{\varphi}_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) + X2l + m_1\ddot{y}_1 l - Y2l\varphi_1 = 0. \tag{2}$$

Excluant y_1, y_2, X et Y et, exprimant les moments d'inertie par l'intermédiaire des masses, nous obtiendrons deux équations différentielles linéaires par rapport à φ_1 et φ_2:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3} m_2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + 2m_2 l^2 \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ \left(4m_2 l^2 + \frac{4}{3} m_1 l^2\right) \ddot{\varphi}_1 + 2m_2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + \\ + (2c - 2Pl)\varphi_1 + (2Pl - c)\varphi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Posons, comme d'ordinaire,

$$\varphi_1 = A_1 e^{kt}, \quad \varphi_2 = A_2 e^{kt}. \tag{4}$$

Après substitution, nous arrivons à deux équations par rapport à A_1 et A_2:

$$A_1(2m_2 l^2 k^2 - c) + A_2\left(\frac{4}{3} m_2 l^2 k^2 + c\right) = 0,$$

$$A_1\left(4m_2 l^2 k^2 + \frac{4}{3} m_1 l^2 k^2 + 2c - 2Pl\right) + A_2(2m_2 l^2 k^2 + 2Pl - c) = 0.$$

Pour déterminer les conditions d'existence de solutions non nulles, faisons s'annuler le déterminant. Cela donne une équation

quadratique par rapport à k^2 :

$$\left(\frac{m_2k^2l^2}{c}\right)^2(3+4\mu)+\frac{m_2k^2l^2}{c}3\left(8+\mu-5\frac{Pl}{c}\right)+\frac{9}{4}=0, \qquad (5)$$

où $\mu = m_1/m_2$.

Le terme libre dans l'équation (5) ne dépend pas de la force P. Par conséquent, il est impossible de choisir un P tel que k devient nul, et c'est pourquoi si l'on revient aux expressions (4), on constate que les angles φ_1 et φ_2 ne peuvent pas être constants. Le modèle étudié possède une propriété identique à celle d'une barre encastrée sollicitée par une force dont la direction suit le mouvement de la barre.

Il n'est pas non plus difficile d'établir de l'équation (5) que la valeur de k^2 pour n'importe quelles forces P reste plus petite que zéro. Cela signifie que k n'a pas de valeurs réelles et que les conditions d'un mouvement apériodique font défaut. Posons que

$$kl\sqrt{\frac{m_2}{c}}=\varepsilon+i\omega,$$

et trouvons la condition pour laquelle ε peut être une grandeur positive. Cela correspond à l'apparition d'un mouvement oscillatoire avec une amplitude croissante.

Séparant dans l'équation (5) les parties réelle et imaginaire, nous obtiendrons

$$[(\varepsilon^2-\omega^2)^2-4\varepsilon^2\omega^2](3+4\mu)+3(\varepsilon^2-\omega^2)\left(8+\mu-5\frac{Pl}{c}\right)+\frac{9}{4}=0.$$

$$4\varepsilon\omega(\varepsilon^2-\omega^2)(3+4\mu)+6\varepsilon\omega\left(8+\mu-5\frac{Pl}{c}\right)=0.$$

Excluons ω. Alors,

$$\varepsilon^4 4(3+4\mu)+\varepsilon^2 6\left(8+\mu-5\frac{Pl}{c}\right)+\frac{9}{4}\frac{\left(8+\mu-5\frac{Pl}{c}\right)^2}{3+4\mu}-\frac{9}{4}=0.$$

d'où

$$\varepsilon^2=\frac{3}{4}\frac{5\frac{Pl}{c}-8-\mu\pm\sqrt{3+4\mu}}{3+4\mu}.$$

La valeur la plus petite de P pour laquelle ε^2 (et, par conséquent, une des racines de ε) devient positive, sera

$$P_{\text{cr}}=\frac{c}{5l}(8+\mu-\sqrt{3+4\mu}).$$

La valeur de la force critique dépend de la distribution des masses entre les barres. Dans le cas où $m_1=m_2$, $\mu=1$. Alors

$$P_{\text{cr}}=\frac{c}{5l}(9-\sqrt{7}).$$

Si la masse de la première barre est petite par rapport à la masse de la seconde, $\mu=0$ et

$$P_{cr}=\frac{c}{5l}(8-\sqrt{3}).$$

Au fur et à mesure que la masse de la barre supérieure diminue par comparaison à celle de la barre inférieure, la valeur de μ croît indéfiniment. De la même façon croît indéfiniment P_{cr} aussi. Et ça se comprend. Dans le cas de l'absence des forces transversales d'inertie, la barre supérieure se trouvera toujours sur une même droite avec celle inférieure.

Dans des systèmes permettant une analyse de la stabilité basée sur l'étude des formes d'équilibre, c'est-à-dire dans les systèmes ordinaires, le critère dynamique donne les mêmes résultats que le critère statique. Examinons, par exemple, le même système de barres dans les conditions de la sollicitation par une force qui conserve sa direction (fig. 389). Dans ce cas, à la place des équations (1), nous obtiendrons

$$Y=P, \quad X=m_2\ddot{y}_2.$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2+m_2\ddot{y}_2l+c(\varphi_2-\varphi_1)-P2l\varphi_2=0.$$

Fig. 389

L'équation (2) restera inchangée. A la place des équations (3), nous aurons

$$\frac{4}{3}m_2l^2\ddot{\varphi}^2+2m_2l^2\ddot{\varphi}_1+c(\varphi_2-\varphi_1)-2Pl\varphi_2=0,$$

$$\left(4m_2l^2+\frac{4}{3}m_1l^2\right)\ddot{\varphi}_1+2m_2l^2\ddot{\varphi}_2+(2c-2Pl)\varphi_1-c\varphi_2=0,$$

tandis qu'à la place de l'équation (5), nous obtiendrons

$$\left(\frac{m_2k^2l^2}{c}\right)^2(3+4\mu)+\frac{m_2k^2l^2}{c}3\left[8+\mu-\frac{Pl}{c}(8+2\mu)\right]+$$
$$+\frac{9}{4}\left[1-\frac{6Pl}{c}+4\left(\frac{Pl}{c}\right)^2\right]=0. \qquad (6)$$

Cette fois-ci, le terme libre de cette équation dépend de la force P et pour

$$P=\frac{c}{4l}(3\pm\sqrt{5})$$

devient nul. Par conséquent, l'existence des valeurs nulles pour k est possible, et il existe une solution pour laquelle φ_1 et φ_2 (4) ne dépendent pas du temps, c'est-à-dire il existe une forme d'équilibre

pour

$$P_{cr} = \frac{c}{4l}(3 - \sqrt{5}).$$

Ici, la valeur de la force critique ne dépend pas de la distribution des masses puisque le paramètre μ ne figure pas, et ne peut pas y figurer, dans le terme libre des équations (5) et (6).

Revenons à la barre flexible et établissons pour elle l'équation de mouvement. Sur un élément de longueur dx de la barre (fig. 390) sont appliqués des forces et des moments dans les sections, ainsi que des forces inertiales distribuées d'intensité $\rho F \partial^2 y/\partial t^2$, ρ étant la densité du matériau de la barre.

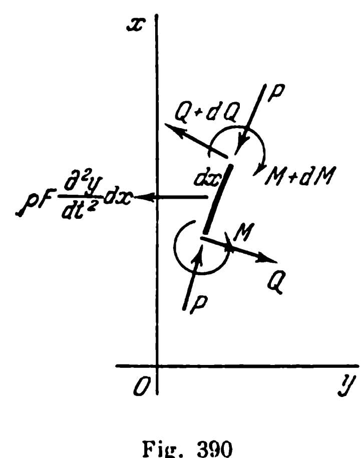


Fig. 390

Projetant les forces sur la normale à la déformée, nous obtiendrons

$$dQ + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx + \rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx = 0.$$

Comme

$$Q = EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

on aura

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Nous prendrons ρF pour une grandeur constante.

Supposons que

$$y = Ye^{i\Omega t},$$

où Y dépend uniquement de la coordonnée x. Pour des valeurs réelles de Ω, le mouvement a un caractère d'oscillations harmoniques. Si Ω est complexe

$$\Omega = a \pm bi,$$

on aura

$$y = Ye^{(\mp b + ia)t} = Ye^{\mp bt}(\cos at + i\sin at). \tag{7}$$

Le mouvement aura, par conséquent, une amplitude, soit décroissante soit croissante, en fonction du signe de b.

Plaçons y dans l'équation de mouvement et introduisons des paramètres adimensionnels

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad \omega = \Omega l^2\sqrt{\frac{\rho F}{EJ}}, \quad \zeta = \frac{x}{l};$$

nous obtiendrons alors,

$$\frac{d^4Y}{d\zeta^4} + \beta^2\frac{d^2Y}{d\zeta^2} - \omega^2 Y = 0. \tag{8}$$

La solution de cette équation sera

$$Y = C_1 \sin \alpha_1 \zeta + C_2 \cos \alpha_1 \zeta + C_3 \operatorname{sh} \alpha_2 \zeta + C_4 \operatorname{ch} \alpha_2 \zeta, \tag{9}$$

où

$$\alpha_1^2 = \frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \omega^2},$$

$$\alpha_2^2 = -\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + \omega^2}.$$

A l'encastrement, nous aurons, indépendamment des conditions de chargement, $Y = 0$ et $dY/d\zeta = 0$. Par conséquent,

$$C_2 + C_4 = 0, \quad \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_3 = 0.$$

A l'extrémité libre de la barre, le moment fléchissant est égal à zéro et, dans le cas d'une force dont la direction suit le mouvement de la barre, l'effort tranchant l'est aussi. C'est pourquoi, pour $x = l$ (ou pour $\xi = 1$)

$$\frac{d^2Y}{d\zeta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^3Y}{d\zeta^3} = 0,$$

ce qui donne encore deux équations:

$$-C_1\alpha_1^2 \sin \alpha_1 - C_2\alpha_1^2 \cos \alpha_1 + C_3\alpha_2^2 \operatorname{sh} \alpha_2 + C_4\alpha_2^2 \operatorname{ch} \alpha_2 = 0.$$

$$-C_1\alpha_1^3 \cos \alpha_1 + C_2\alpha_1^3 \sin \alpha_1 + C_3\alpha_2^3 \operatorname{ch} \alpha_2 + C_4\alpha_2^3 \operatorname{sh} \alpha_2 = 0.$$

Dans le cas d'une force P qui conserve inchangée sa direction, la dernière condition se présenterait autrement. Ici, l'effort tranchant n'est pas égal à zéro mais bien à $-Py'_{x=l}$.

Annulons le déterminant des quatres équations obtenues. Alors

$$\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_1\alpha_2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \sin \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 + 2\alpha_1^2\alpha_2^2 \cos \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 = 0$$

ou

$$\beta^4 + 2\omega^2 + \beta^2\omega \sin \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 + 2\omega^2 \cos \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 = 0. \tag{10}$$

Dans le cas d'une force qui conserve sa direction, à la place de l'expression (10) nous aurons

$$2\omega^2 - \beta^2\omega \sin \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 + (\beta^4 + 2\omega^2) \cos \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 = 0. \tag{11}$$

La relation (10) permet de construire la courbe de dépendance de la fréquence ω des oscillations propres de la barre par rapport à une force adimensionnelle β^2 (fig. 391). Sur ce même graphique, on a montré, en pointillé, la courbe de variation de la fréquence pour le cas d'une force qui garde constante sa direction.

Pour $\beta = 0$, nous avons la première (ω_1) et la seconde (ω_2) fréquences des oscillations propres d'une barre libre encastrée. Avec l'augmentation de la force qui conserve inchangée sa direction, ces

fréquences (de même que toutes les fréquences plus hautes) diminuent en s'annulant pour une force ayant atteint des valeurs critiques, c'est-à-dire

$$\text{pour } \beta^2 = \beta_1^2 = \frac{\pi^2}{4} \text{ ou pour } P = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

et, d'une manière générale, pour

$$P = \frac{n^2\pi^2 EJ}{4l^2} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots).$$

Dans le cas d'une force dont la direction suit le mouvement de la barre, la fréquence inférieure augmente avec l'augmentation de P et, au point A, les courbes du premier et du deuxième tons se confondent. Si on étend le graphique au domaine des fréquences plus hautes, on peut constater qu'un processus analogue aura lieu pour la 3-ième et la 4-ième fréquence, la 5-ième et la 6-ième fréquence, etc.

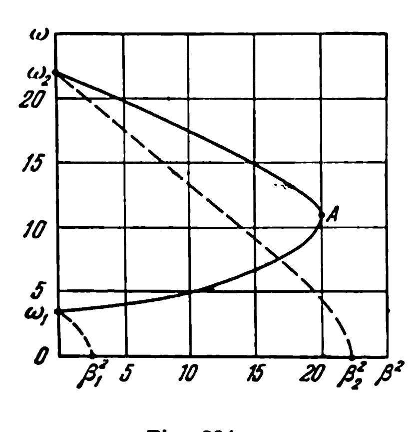


Fig. 391

Dans ce cas, pour déterminer la valeur critique de la force P, il est indispensable de trouver une telle valeur de P, la plus petite, pour laquelle les racines de ω dans l'équation (10) seront multiples. Cela signifie que si β continue d'augmenter, les racines deviendront complexes conjuguées et il y aura une racine avec partie imaginaire négative, c'est-à-dire $\Omega = a - bi$. En vertu de l'expression (7), cela correspond à l'apparition d'une forme d'oscillations avec une amplitude croissante. De la fig. 391 on voit qu'au point A les racines sont multiples.

Effectuant une estimation numérique, déterminons

$$\beta^2 = 20{,}05 \ (\omega = 11{,}016),$$

par conséquent,

$$P_{\text{cr}} = 20{,}05 \frac{EJ}{l^2}.$$

Le résultat obtenu n'est valable que pour le cas d'une masse uniformément répartie le long de la barre. Pour une autre distribution des masses, la force critique ne sera pas la même. Cela est très important à souligner vu que, de temps en temps, on observe des tentatives visant à déterminer, pour des systèmes analogues, la force critique à l'aide de différents artifices ne tenant pas compte des lois de la dynamique, ce qui entraîne l'ignorance du fait de la distri-

bution des masses et par là même une incorrection de principe de la solution.

144. Le cas de sollicitation a) est entré dans la littérature scientifique sous le nom de problème de Réout.

La barre n'a pas de forme d'équilibre autre que la forme initiale rectiligne. Effectivement,

$$EJy'' = -Py$$

(fig. 392) ; ensuite

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x;$$

pour $x = 0$, $y = 0$ et $y' = 0$, par conséquent,

$$B = 0 \quad \text{et} \quad A = 0.$$

Passons à l'analyse des formes de mouvement. Nous considérerons que la masse d'un disque plan à l'extrémité de la barre est petite. La fonction Y (formule (9)), trouvée lors de la résolution du problème précédent, reste en vigueur. Les deux premières conditions aux limites restent aussi en vigueur :

$$\text{pour} \quad \zeta = 0 \quad Y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dY}{d\zeta} = 0,$$

c'est-à-dire

$$C_2 + C_4 = 0, \quad \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_3 = 0.$$

Pour $x = l$ $(\zeta = 1)$, nous avons :

$$EJy'' = -Py, \quad EJy''' = -Py',$$

ou

$$Y'' + \beta^2 Y = 0, \quad Y''' + \beta^2 Y' = 0.$$

Nous référant à la solution (9) du problème précédent, nous obtenons

$$C_1(-\alpha_1^2 + \beta^2) \sin \alpha_1 + C_2(-\alpha_1^2 + \beta^2) \cos \alpha_1 + \\ + C_3(\alpha_2^2 + \beta^2) \operatorname{sh} \alpha_2 + C_4(\alpha_2^2 + \beta^2) \operatorname{ch} \alpha_2 = 0,$$

$$C_1(-\alpha_1^3 + \beta^2 \alpha_1) \cos \alpha_1 + C_2(\alpha_1^3 - \beta^2 \alpha_1) \sin \alpha_1 + \\ + C_3(\alpha_2^3 + \beta^2 \alpha_2) \operatorname{ch} \alpha_2 + C_4(\alpha_2^3 + \beta^2 \alpha_2) \operatorname{sh} \alpha_2 = 0.$$

Annulant le déterminant du système, nous aboutissons à une équation transcendante

$$\beta^4 + 2\omega^2 + \beta^2 \omega \sin \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 + 2\omega^2 \cos \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 = 0,$$

qui coïncide entièrement avec l'équation (10). Ainsi, la force critique sera la même que dans le problème précédent :

$$P_{cr} = \frac{20{,}05\, EJ}{l^2}.$$

On aurait pu, dès le départ, se douter de cette coïncidence des résultats. Les efforts agissant sur les extrémités de la barre sont dans les deux cas identiques. La différence ne réside que dans le système de référence y et x (fig. 393).

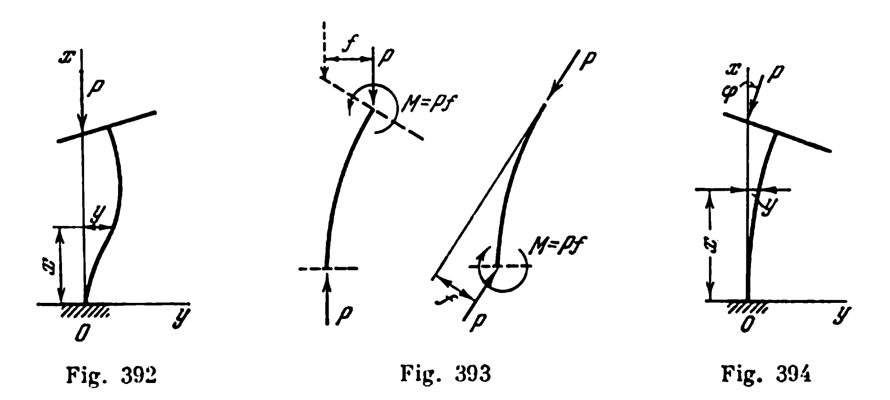


Fig. 392 Fig. 393 Fig. 394

Dans le cas de sollicitation *b*) (fig. 138), le problème se résout à la base de l'analyse habituelle des formes d'équilibre.

On a l'équation

$$EJy'' = -Py - P\varphi(l-x),$$

ou

$$y'' + \alpha^2 y = -\alpha^2\varphi(l-x) \quad \left(\alpha^2 = \frac{P}{EJ}\right),$$

d'où

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x - \varphi(l-x).$$

Pour $x=0$, $y=0$ et $y'=0$, tandis que pour $x=l$, $y'=\varphi$.

Nous obtenons alors les trois équations suivantes:

$$B - \varphi l = 0, \quad A\alpha + \varphi = 0, \quad A\cos\alpha l - B\sin\alpha l = 0.$$

Annulant le déterminant de ce système,

$$\operatorname{tg}\alpha l = -\alpha l.$$

La plus petite racine, différente de zéro, de cette équation sera

$$\alpha l = 2{,}029,$$

d'où

$$P_{\text{cr}} = \frac{4{,}115\,EJ}{l^2}.$$

145. Le système offre des analogies avec celui étudié dans le problème 143. Pour étudier sa stabilité, il est indispensable d'établir les équations de mouvement.

Examinons un élément de longueur dx (fig. 395). Egalant à zéro la somme des projections des forces sur l'axe y, nous obtenons

$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx+P\frac{l-x-dx}{l}\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx\right)-P\frac{l-x}{l}\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

ou

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[P\frac{l-x}{l}\frac{\partial y}{\partial x}\right]=0.$$

Mais, comme

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

on aura

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left[P\frac{l-x}{l}\frac{\partial y}{\partial x}\right]+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \qquad (1)$$

Ici ρ est, comme d'ordinaire, la densité du matériau, F, l'aire d'une section. Ces grandeurs (tout comme EJ) ne dépendent pas de x.

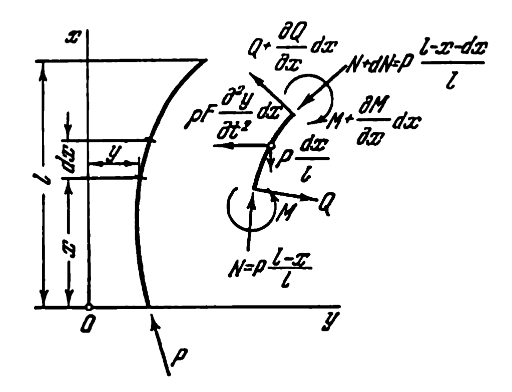


Fig. 395

L'équation (1) a une structure qui, dès le départ, prédétermine l'emploi d'ordinateurs. Il est vrai que pour le cas d'une barre homogène, on a encore l'espoir de ramener la solution aux fonctions de Bessel dotées de tables, ou bien à d'autres fonctions qui sont apparentées à ces dernières. Mais même dans ce cas, le problème se résout plus rapidement à l'aide d'ordinateurs. Posons

$$y=Ye^{i\Omega t}$$

et passons à la forme adimensionnelle

$$\frac{d^4Y}{d\zeta^4}+\beta^2\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta)\frac{dY}{d\zeta}\right]-\omega^2 Y=0,$$

où

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad \omega^2 = \frac{\rho F l^4}{EJ} \Omega^2, \quad \zeta = \frac{x}{l}.$$

Conditions aux limites:

$$\text{pour } \zeta = 0 \quad \frac{d^2Y}{d\zeta^2} = 0, \quad \frac{d^3Y}{d\zeta^3} = 0,$$

$$\text{pour } \zeta = 1 \quad \frac{d^2Y}{d\zeta^2} = 0, \quad \frac{d^3Y}{d\zeta^3} = 0.$$

Cherchons la solution sous forme de série

$$Y = \sum_{n=0,\,1,\,2,\,\ldots} A_n \zeta^n.$$

D'après les conditions aux bornes, $A_2 = A_3 = 0$,

$$\sum A_n n (n-1) = 0, \quad \sum A_n n (n-1)(n-2) = 0. \tag{2}$$

Pour déterminer les termes de la série, nous avons une formule de récurrence

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \times$$
$$\times \{\omega^2 A_{n-4} + \beta^2 [A_{n-3}(n-3)^2 - A_{n-2}(n-2)(n-3)]\}.$$

Les constantes A_0 et A_1 restent indéterminées. Il faut les choisir de telle sorte que soient satisfaites les deux dernières conditions aux limites. Comme A_0 et A_1 entrent linéairement dans les expressions (2) on peut écrire:

$$\sum A_n n (n-1) = K_0 A_0 + K_1 A_1 = 0,$$

$$\sum A_n n (n-1)(n-2) = L_0 A_0 + L_1 A_1 = 0.$$

La condition d'existence des solutions non nulles sera, de toute évidence, la suivante:

$$K_0 L_1 - K_1 L_0 = D = 0. \tag{3}$$

Ordre de calcul:

Fixons β et ω.

Posons $A_0 = 1$ et $A_1 = 0$ et au moyen de la formule de récurrence déterminons les termes de la série. Dans le problème en question, il suffira d'en prendre 20 ou 30. On calcule ensuite $\sum A_n n (n-1) = K_0$ et $\sum A_n n (n-1)(n-2) = L_0$.

Posant $A_0 = 0$ et $A_1 = 1$, répétons l'opération; les sommes trouvées seront alors égales respectivement à K_1 et L_1. Puis, on calcule D (3). Varions ω et calculons à nouveau D. Comparons-le à sa valeur précédente. Si D n'a pas changé de signe, continuons; s'il a changé de signe, cela signifie qu'on a sauté la valeur d'une fréquence pour la force donnée. ω se détermine alors par interpolation.

Pour finir, construisons le graphique exprimant la dépendance de ω par rapport à β^2; il est représenté sur la fig. 396.

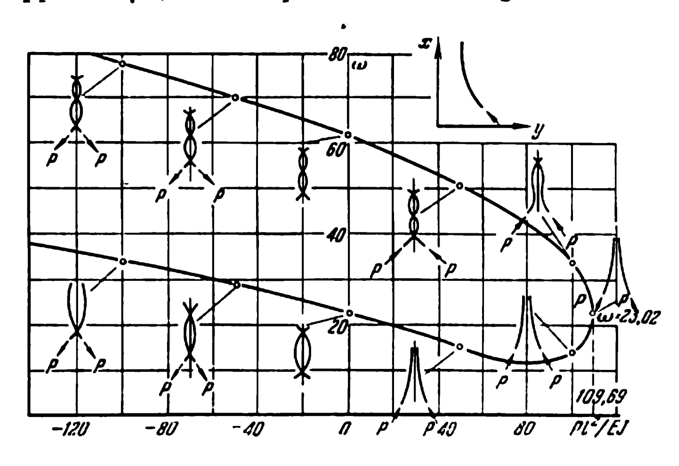


Fig. 396

Tout comme dans le problème 143, pour une force critique P les fréquences du premier et du second ton vont coïncider:

$$\beta_{cr}^2 = 109{,}69 \quad (\omega = 23{,}02).$$

La force critique sera

$$P_{cr} = \frac{109{,}69\, EJ}{l^2}.$$

Sur la fig. 396, on a montré, pour une série de valeurs de P, les formes des oscillations de la barre. On a examiné non seulement le cas d'une force de compression P, mais aussi celui d'une force de traction identique. Détail curieux: pour certaines valeurs de P les points nodaux deviennent imaginaires.

146. Manifestement, on retrouve ici le problème 143, mais avec d'autres conditions aux limites. L'expression (9) du problème 143 reste en vigueur. Changeront uniquement les conditions aux limites. Cette fois-ci

$$\begin{aligned} &\text{pour } \zeta = 0 \qquad \frac{d^2Y}{d\zeta^2} = 0 \text{ et } \frac{d^3Y}{d\zeta^3} = 0, \\ &\text{pour } \zeta = 1, \text{ on a aussi } \frac{d^2Y}{d\zeta^2} = 0 \text{ et } \frac{d^3Y}{d\zeta^3} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Nous obtiendrons ensuite quatre équations:

$$-\alpha_1^2 C_2 + \alpha_2^2 C_4 = 0,$$
$$-\alpha_1^3 C_1 + \alpha_2^3 C_3 = 0,$$
$$-\alpha_1^2 C_1 \sin\alpha_1 - \alpha_1^2 C_2 \cos\alpha_1 + \alpha_2^2 C_3 \operatorname{sh}\alpha_2 + \alpha_2^2 C_4 \operatorname{ch}\alpha_2 = 0,$$
$$-\alpha_1^3 C_1 \cos\alpha_1 + \alpha_1^3 C_2 \sin\alpha_1 + \alpha_2^3 C_3 \operatorname{ch}\alpha_2 + \alpha_2^3 C_4 \operatorname{sh}\alpha_2 = 0.$$

Annulant le déterminant, nous obtiendrons une équation transcendante

$$\omega (\cos \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 - 1) + \beta^2 \sin \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 = 0, \qquad (2)$$

que nous allons soumettre à l'analyse.

La question du comportement de la barre se résout en fonction du caractère de la fonction $\omega = f(\beta)$. Si, pour certaines valeurs de la force adimensionnelle β^2, la fréquence ω devient égale à zéro, la barre a des formes d'équilibre autres que la forme rectiligne. S'il n'y a pas de points zéro pour ω ; il faut déterminer les conditions pour lesquelles les fréquences deviennent multiples et cela correspondra aux conditions d'apparition d'un mouvement caractérisé par une amplitude croissante.

Une autre méthode de résolution, proposée par L. Balabouch, semble être très efficace. Référons-nous à l'équation (8) du problème 143. Dérivant deux fois cette équation par rapport à ζ et désignant $d^2Y/d\zeta^2$ par Y_0, nous obtiendrons une équation identique :

$$\frac{d^4Y_0}{d\zeta^4} + \beta^2 \frac{d^2Y_0}{d\zeta^2} - \omega^2 Y_0 = 0,$$

mais cette fois-ci, les conditions aux limites seront déjà autres :

$$\begin{aligned} &\text{pour} \quad \zeta = 0 \quad Y_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dY_0}{d\zeta} = 0, \\ &\text{pour} \quad \zeta = 1 \quad Y_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dY_0}{d\zeta} = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Par conséquent, la solution sera la même que pour le cas d'une barre comprimée, encastrée aux extrémités (fig. 397). Or, on sait ici que

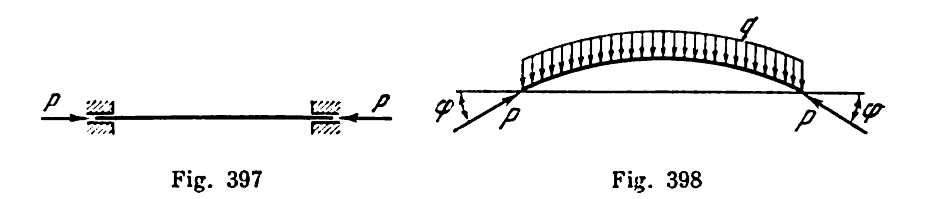


Fig. 397 Fig. 398

la barre n'a pas de formes oscillatoires de perte de stabilité. La nouvelle forme d'équilibre apparaît pour $P_{cr} = 4\pi^2 EJ/l^2$.

L'on peut s'en convaincre en se basant sur l'analyse de l'équation (2) qui, soit dit en passant, reste la même tant pour les conditions aux limites (1) que pour les conditions aux limites (3).

L'on comprend que la forme d'équilibre de la barre, qui est montrée sur la fig. 397, est relative dans ce sens-ci qu'elle doit être considérée dans un système de coordonnées lié, lequel se meut avec accélération dans l'espace, ensemble avec la barre (fig. 398). Ici, les deux composantes $P\varphi$ se trouvent équilibrées par les forces d'inertie de D'Alembert $q = 2P\varphi/\rho F l^2$.

L'on comprend que l'opération de double dérivation de l'équation ne conduit aux résultats indiqués que dans le seul cas d'une barre homogène. Pour une distribution non uniforme des masses ou, pour une rigidité variable, le résultat sera autre.

En guise de système analogue, on peut prendre deux barres rigides reliées entre elles par un ressort de rigidité c (fig. 399). Quand apparaît un angle de rotation φ, le système commence un mouvement

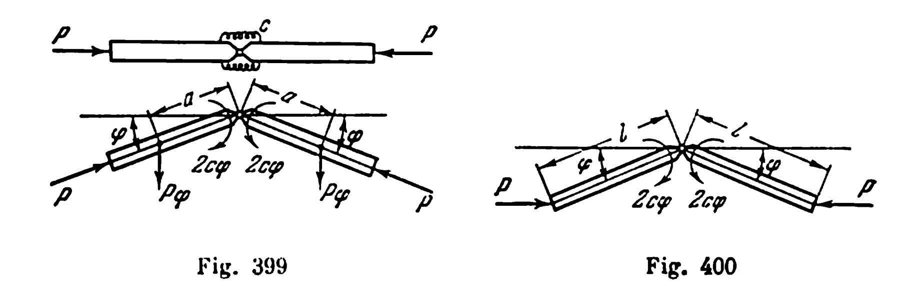


Fig. 399 Fig. 400

accéléré. Introduisant au centre des masses des forces inertiales d'équilibre, nous obtenons la condition de stabilité sous la forme suivante :

$$2c\varphi = P\varphi a,$$

ou

$$P_{cr} = \frac{2c}{a},$$

a étant la distance entre la charnière et le centre des masses.

Si le système était sollicité par des forces P conservant leur direction (fig. 400), la distribution des masses n'aurait, naturellement, pas d'importance. Dans ce cas,

$$P_{cr} = \frac{2c}{l},$$

l étant la longueur d'une barre.

147. Malgré une simplicité apparente, le problème posé présente des difficultés de même nature que celles que nous avons rencontrées dans les problèmes précédents.

Essayons de trouver les conditions d'existence des formes d'équilibre, différentes de la forme initiale. Pour ce faire, supposons que la poutre s'est voilée et est sortie du plan de flexion initiale (fig. 401). Désignons par y le déplacement latéral de l'axe de la poutre et par φ l'angle de rotation de la section par rapport à l'axe x. Nous prendrons pour directions positives de y et φ celles qui sont montrées sur le dessin.

Dans une position inclinée dans les sections de la poutre apparaît un moment fléchissant agissant dans le plan de rigidité minimale. Ce moment est égal à $M\varphi$ et est dirigé dans le sens de l'accroissement

de la courbure de la poutre. Le moment de torsion créé dans une section de la poutre en état d'incurvation est égal à My' et est dirigé

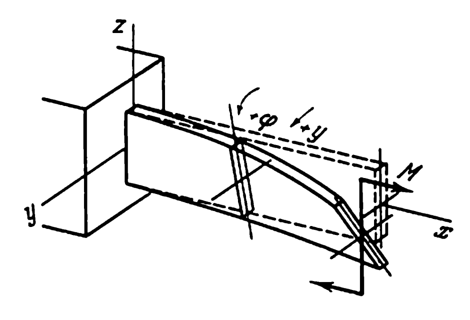


Fig. 401

de telle façon qu'il tend à diminuer l'angle φ. Par conséquent,

$$M_{\mathrm{fl}} = +M\varphi, \quad M_{\mathrm{t}} = -My'.$$

D'autre part,

$$M_{\mathrm{fl}} = EJy'', \quad M_{\mathrm{t}} = GJ_{\mathrm{t}}\varphi',$$

où

$$J = \frac{bh^3}{12}, \quad J_{\mathrm{t}} = \frac{bh^3}{3}.$$

Nous obtenons maintenant les équations

$$EJy'' = M\varphi, \quad GJ_{\mathrm{t}}\varphi' = -My'. \tag{1}$$

Leur solution sera la suivante:

$$\varphi = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x,$$

$$y = -\frac{GJ_{\mathrm{t}}}{M}(A\sin\alpha x + B\cos\alpha x) + C,$$

où

$$\alpha^2 = \frac{M^2}{EJGJ_{\mathrm{t}}},$$

tandis que A, B et C sont des constantes arbitraires qui se déterminent des conditions suivantes:

pour $x = 0$ nous avons $\varphi = 0, y = 0, y' = 0$. Nous obtenons alors

$$B = 0, \quad -\frac{GJ_{\mathrm{t}}}{M}B + C = 0, \quad A = 0.$$

Comme $A = B = C = 0$, de là il découle que pour n'importe quelles valeurs finies du moment M, il n'y aura pas de formes d'équilibre

différentes de la forme plane de flexion. Il reste à étudier les formes de mouvement et à essayer de trouver les conditions pour lesquelles devient possible un mouvement de la barre avec une déviation croissante dans le temps.

Avant de passer à cette analyse, remarquons que dans le cas d'un moment dont la direction suit le mouvement de la section frontale (fig. 402), la barre n'aura pas non plus de formes d'équilibre, différentes de la forme initiale de flexion plane. Ce n'est que dans le cas

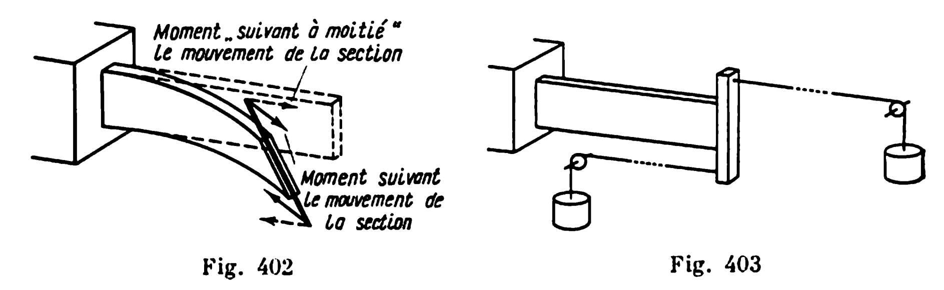


Fig. 402

Fig. 403

d'un moment « suivant à moitié » le mouvement de la section frontale, comme celui montré en pointillé sur la même fig. 402, que devient possible une nouvelle forme d'équilibre pour

$$M = \frac{\pi}{2l}\sqrt{EJ \cdot GJ_t}\,.$$

Le moment « suivant à moitié » le mouvement de cette section peut être réalisé à l'aide de deux poids (fig. 403). Il est curieux de remarquer que la possibilité de réalisation des forces ou des moments donnés à l'aide de forces créées par un poids est, jusqu'à présent, dans tous les cas connus, la seule qui garantit que la stabilité d'un système puisse être étudiée à l'aide de la recherche de formes voisines d'équilibre. Jusqu'ici, la nécessité de chercher des formes de mouvement pour des sollicitations constituées par les efforts d'un poids, ne s'était pas encore faite sentir.

Etablissons les équations de mouvement de la barre. Pour cela, il est indispensable d'introduire une sollicitation inertiale répartie

$$q_{\text{inert}} = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ainsi qu'un moment inertial réparti lié à la rotation des masses par rapport à l'axe de la barre

$$m_{\text{inert}} = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\,,$$

ρ étant la densité du matériau, J_p, le moment d'inertie polaire de la section.

Comme on sait,

$$q = \frac{\partial^2 M_{\text{fl}}}{\partial x^2}\,, \qquad m = \frac{\partial M_t}{\partial x}\,,$$

ainsi, en dérivant la première des équations (1) deux fois par rapport à x, tandis que la deuxième une fois seulement et, en ajoutant aux termes du deuxième membre respectivement q_{inert} et m_{inert}, nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} EJ\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= M\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \rho F\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ GJ_t\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= -M\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho J_p\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Posons

$$y = Yl e^{i\omega\sqrt{\frac{EJ}{\rho F l^4}}t}, \quad \varphi = \Phi\sqrt{\frac{EJ}{GJ_t}}\, e^{i\omega\sqrt{\frac{EJ}{\rho F l^4}}t},$$

Y et Φ étant des grandeurs adimensionnelles dépendant de la coordonnée adimensionnelle $\zeta = \frac{x}{l}$, ω, la fréquence adimensionnelle.

Les équations (2) prennent la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^4 Y}{\partial\zeta^4} - M_0\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2} - \omega^2 Y &= 0, \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2} + M_0\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\zeta^2} + k^2\omega^2\Phi &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où M_0 est le moment adimensionnel, k, caractéristique géométrique :

$$M_0 = \frac{Ml}{\sqrt{EJ\cdot GJ_t}}, \quad k^2 = \frac{EJ}{GJ_t}\,\frac{J_p}{Fl^2}. \tag{4}$$

L'étude du système (3) à l'aide de procédés de l'analyse fonctionnelle conduit à des transformations très encombrantes. Aussi est-il plus commode de faire ici appel aux ordinateurs. Représentons les fonctions Y et Φ sous forme de séries entières

$$Y = \sum_{n=0,\,1,\,2,\,\ldots} A_n\zeta^n, \quad \Phi = \sum_{n=0,\,1,\,2,\,\ldots} B_n\zeta^n.$$

Mettant Y et Φ dans les équations (3), nous en arrivons à des formules de récurrence

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\,[\omega^2 A_{n-4} + M_0 B_{n-2}(n-2)(n-3)], \tag{5}$$

$$B_{n-2} = -M_0 A_{n-2} - \frac{k^2\omega^2}{(n-2)(n-3)}\,B_{n-4}.$$

Lors des calculs, l'on peut se limiter à 20-30 termes dans la série.

Dans l'encastrement, pour $x = 0$ ($\zeta = 0$), nous avons $y = 0$, $\partial y/\partial x = 0$ et $\varphi = 0$, par conséquent, $A_0 = A_1 = B_0 = 0$.

A l'extrémité de la barre (pour $\zeta = 1$), nous avons

$$EJ\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M\varphi; \quad GJ_t\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -M\,\frac{\partial y}{\partial x};$$

$$EJ\,\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = M\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

La dernière condition limite exprime l'égalité à zéro de l'effort tranchant au bout de la barre. Effectivement, l'effort tranchant se

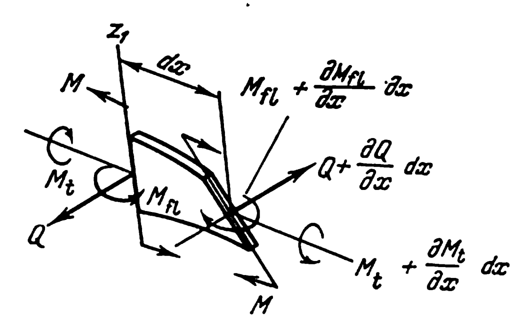


Fig. 404

détermine des conditions d'équilibre d'un élément (fig. 404). Egalant à zéro la somme des moments créés par les forces par rapport à l'axe z_1, nous trouverons

$$Q = \frac{\partial M_{fl}}{\partial x} - M \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

ou

$$Q = EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - M \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Passant à des paramètres adimensionnels, nous obtenons

$$\frac{d^2Y}{d\zeta^2} - M_0\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{d\zeta} + M_0 \frac{dY}{d\zeta} = 0,$$

$$\frac{d^3Y}{d\zeta^3} - M_0 \frac{d\Phi}{d\zeta} = 0,$$

ou, après avoir posé $\zeta = 1$,

$$\left.\begin{aligned} \sum A_n n (n-1) - M_0 \sum B_n = 0, \\ \sum B_n n + M_0 \sum A_n n = 0, \\ \sum A_n n (n-1)(n-2) - M_0 \sum B_n n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Quand on calcule les coefficients A_n et B_n, les trois premiers d'entre eux A_2, A_3 et B_1 restent indéterminés. Il faut les choisir de telle façon que soient remplies les conditions (6). Or, par rapport aux constantes A_2, A_3 et B_1, les équations (6) sont homogènes. C'est pourquoi, on peut les écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} a_{11}A_2 + a_{12}A_3 + a_{13}B_1 = 0, \\ a_{21}A_2 + a_{22}A_3 + a_{23}B_1 = 0, \\ a_{31}A_2 + a_{32}A_3 + a_{33}B_1 = 0. \end{aligned}$$

Pour obtenir une solution non nulle, il faut remplir la condition suivante

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Les calculs se feront maintenant dans l'ordre suivant.

Fixons le paramètre

$$k^2=\frac{EJ}{GJ_t}\frac{J_p}{Fl^2}=\frac{1+\mu}{24}\frac{b^2}{l^2}.$$

Choisissons M_0 et ω.

Posons ensuite $A_2=1$, $A_3=B_1=0$ et, d'après les formules de récurrence (5), calculons les coefficients A_n et B_n, puis les premiers membres des équations (6). Ils sont respectivement égaux à a_{11}, a_{21} et a_{31}. Ensuite, posons $A_2=0$, $A_3=1$, $B_1=0$. Les premiers membres des équations (6) nous donneront alors les valeurs de a_{12}, a_{22} et a_{32}. Enfin, en posant $A_2=A_3=0$ et $B_1=1$, nous trouverons a_{13}, a_{23} et a_{33}. En calculant le déterminant, on se convainc que, généralement parlant, il n'est pas nul. Alors, en faisant varier ω, nous obtiendrons $D=0$. C'est de cette façon-là que se déterminent les fréquences des oscillations propres pour un moment donné M_0.

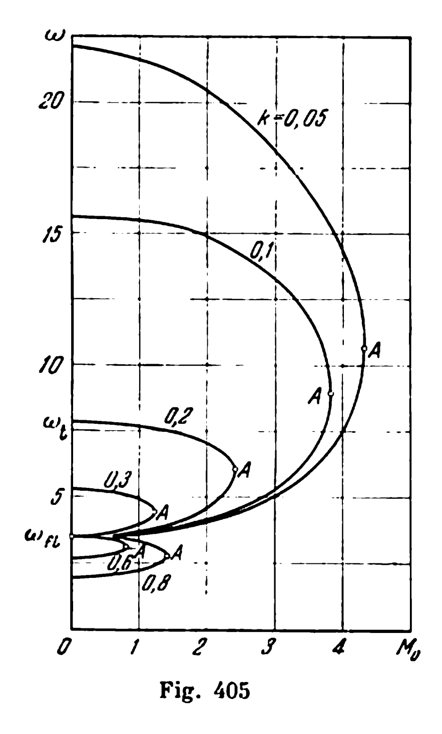


Fig. 405

Analysons, en variant M_0, le comportement des fréquences et déterminons tout comme auparavant les conditions à remplir pour qu'elles soient multiples.

Pour $M_0=0$, nous avons les fréquences des oscillations propres de flexion (ω_{fl}) et de torsion (ω_t). Avec l'augmentation de M_0, les fréquences se rapprochent et, pour une valeur critique du moment M_0, elles deviennent multiples (points A sur la fig. 405).

On a montré sur la fig. 406 la courbe de dépendance de M_{0cr} par rapport au paramètre k. Pour $k=0{,}445$, M_{0cr} devient égal à zéro, ce qui a lieu lorsque coïncident la fréquence du premier ton des oscillations de flexion ω_{fl} et la fréquence ω_t du premier ton des oscillations de torsion.

Il est à remarquer que la première (la plus petite) fréquence coïncide toujours avec la seconde indépendamment de ce que nous la prenons pour une fréquence de flexion ou pour une fréquence de torsion. Par exemple, pour $k = 0{,}05$, la première fréquence de torsion $\omega_{1t} = 31{,}4$, alors que les fréquences de flexion $\omega_{1f1} = 3{,}5$ et $\omega_{2f1} = 22$. Au fur et à mesure que le moment augmente, les fréquences de flexion tendent à coïncider. Avec l'augmentation du paramètre k,

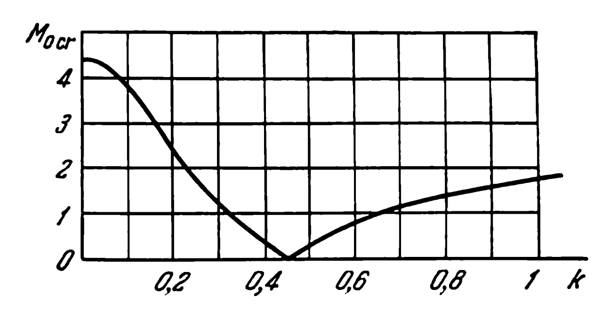


Fig. 406

la première fréquence de torsion diminue, et quand elle devient plus petite que la deuxième fréquence de flexion, la première fréquence de flexion va déjà, avec l'augmentation de M_0, se confondre avec elle. On peut aussi en faire la constatation sur les courbes de la fig. 405.

Dans le cas d'un moment qui suit le mouvement de la barre en tournant ensemble avec le plan de la section frontale, les conditions aux limites changent et, à la place de (6), nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \sum A_n n\,(n-1) &= 0, \\ \sum B_n n &= 0, \\ \sum A_n n\,(n-1)\,(n-2) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Pour les conditions (7), les valeurs critiques du moment seront les mêmes que pour les conditions (6). Cette coïncidence des résultats n'est pas fortuite. Elle découle du fait que les conditions d'application des charges sur la barre, à l'extrémité gauche et à l'extrémité droite, se convertissent mutuellement les unes dans les autres de la même façon que pour les systèmes étudiés dans les problèmes 143 et 144.

148. Ce problème porte dans la littérature scientifique le nom du problème de E. Nicolaï. C'est justement la résolution de ce problème qui, pour la première fois en 1927, a permis de constater le fait qu'il existe des systèmes dont l'analyse de la stabilité ne peut pas être faite à partir de la définition des formes d'équilibre selon Euler. Effectivement, dans le cas le plus simple, à savoir celui où

les rigidités de la barre sont, dans les deux plans principaux, égales, nous avons les équations d'équilibre suivantes:

$$\left.\begin{aligned} EJy'' &= -Py + Mz', \\ EJz'' &= -Pz - My'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Elles s'obtiennent des équations (1) du problème 113 (voir p. 219) où l'on a changé le signe précédant P par son contraire.

La solution des équations reste la même:

$$y = A\cos\alpha_1 x + B\sin\alpha_1 x + C\cos\alpha_2 x + D\sin\alpha_2 x,$$

$$z = A\sin\alpha_1 x - B\cos\alpha_1 x + C\sin\alpha_2 x - D\cos\alpha_2 x,$$

α_1 et α_2 sont les racines de l'équation du second degré

$$\alpha^2 + \frac{M}{EJ}\alpha - \frac{P}{EJ} = 0. \qquad (2)$$

En établissant les équations (1), on supposait que les déplacements y et z sont comptés à partir de la ligne d'action de la force P. C'est pourquoi, en plaçant l'origine des coordonnées x, y et z au point d'application de la force P (fig. 407), nous aboutirons aux conditions aux limites suivantes:

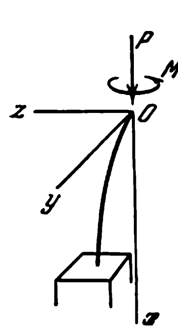


Fig. 407

$$\text{pour } x = 0 \quad y = z = 0,$$
$$\text{pour } x = l \quad y' = z' = 0.$$

Cela donne

$$A + C = 0, \quad B + D = 0,$$

$$-A\alpha_1\sin\alpha_1 l + B\alpha_1\cos\alpha_1 l - C\alpha_2\sin\alpha_2 l + D\alpha_2\cos\alpha_2 l = 0,$$

$$A\alpha_1\cos\alpha_1 l + B\alpha_1\sin\alpha_1 l + C\alpha_2\cos\alpha_2 l + D\alpha_2\sin\alpha_2 l = 0.$$

Egalant à zéro le déterminant de ce système d'équations, nous obtenons

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 2\alpha_1\alpha_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\,l. \qquad (3)$$

Par ailleurs, en vertu de l'équation (2),

$$\alpha_1\alpha_2 = -\frac{P}{EJ}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \left(\frac{M}{EJ}\right)^2 + \frac{2P}{EJ},$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\sqrt{\left(\frac{M}{2EJ}\right)^2 + \frac{P}{EJ}},$$

c'est pourquoi l'équation (3) prend la forme suivante:

$$\cos\sqrt{\left(\frac{Ml}{EJ}\right)^2 + \frac{4Pl^2}{EJ}} = -\left(1 + \frac{M^2}{2PEJ}\right).$$

Pour des valeurs du moment M, différentes de zéro, cette équation ne peut pas être satisfaite puisque le deuxième membre est, en valeur absolue, plus grand que l'unité. Ce n'est que dans le cas où $M = 0$ que

$$\cos\sqrt{\frac{4Pl^2}{EJ}} = -1,$$

et, alors, nous obtenons la valeur ordinaire de la force critique

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Ainsi, pour une valeur aussi petite que l'on veut, mais différente de zéro, du moment M et, pour une force P aussi grande que l'on veut, la barre n'a pas d'autres formes d'équilibre que celle rectiligne. On obtient aussi un résultat absolument identique dans le cas où, lors de la flexion de la barre, le plan du moment M se tourne ensemble avec la section frontale. Dans le cas d'un moment « suivant à moitié » le mouvement de cette section et qui serait créé par deux poids, le système aura, comme nous l'avons vu lors de la résolution du problème 133, des formes d'équilibre différentes de la forme initiale. Ainsi, on observe une analogie avec le comportement du système étudié dans le problème précédent. Là, cependant, nous avions un seul facteur extérieur de forces : le moment M. Dans le système en question on a par contre deux facteurs de forces : la force P et le moment M. Si ce n'est que la force qui est appliquée, alors son augmentation entraînera le passage à une nouvelle forme d'équilibre. En ce qui concerne le moment (à l'exception du moment « suivant à moitié » le mouvement du système), son trait principal est le passage à de nouvelles formes de mouvement. Aussi est-il intéressant d'observer le comportement du système quand ces deux facteurs agissent de concert et de déterminer dans quel cas apparaît la première la forme de mouvement et dans quel cas celle d'équilibre.

En dérivant deux fois par rapport à x les expressions (1) et en additionnant les termes correspondant aux forces d'inertie, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} EJ_1\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - M\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,\\ EJ_2\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + M\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \rho F\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Comme nous le verrons plus loin, le comportement du système dépend essentiellement du rapport entre les rigidités en flexion dans les plans principaux. C'est pourquoi, dans les équations (4) on a introduit, au lieu d'une seule rigidité EJ, deux : EJ_1 et EJ_2.

Cette fois-ci, il est plus commode de placer l'origine des coordonnées dans l'encastrement (fig. 408). Indépendamment des conditions de sollicitation, pour $x = 0$, nous avons $y = z = 0$ et $\partial y/\partial x = \partial z/\partial x = 0$.

Les expressions des efforts tranchants Q_x et Q_y pour une barre en flexion, se compliquent par l'introduction d'un terme contenant le moment fléchissant, c'est-à-dire

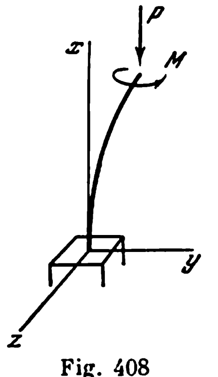


Fig. 408

$$Q_y = \frac{\partial M_{z_1}}{\partial x} - M \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$Q_z = \frac{\partial M_{y_1}}{\partial x} + M \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

M_{z_1} et M_{y_1} sont les moments fléchissants par rapport aux axes mobiles y_1, z_1. Les relations nécessaires s'obtiennent facilement si l'on égale à zéro la somme des moments des forces agissant sur un élément dx par rapport aux axes y_1 et z_1 (voir fig. 409, où sont montrées les projections de cet élément sur les plans xy et xz). A l'extrémité de la barre,

$$Q_y = -P \frac{\partial y}{\partial x}, \quad Q_z = -P \frac{\partial z}{\partial x},$$

c'est pourquoi, pour $x = l$ indépendamment du comportement du

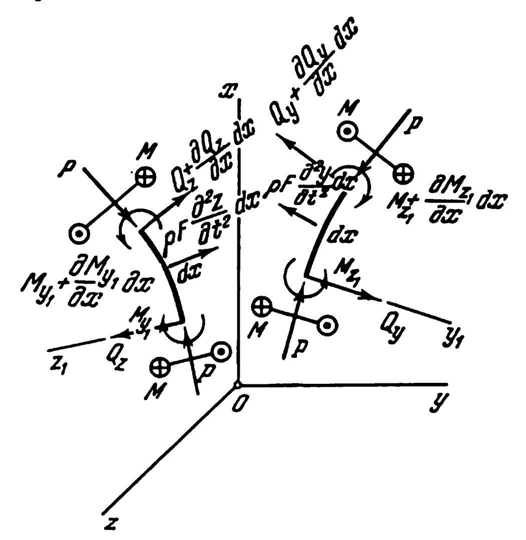


Fig. 409

moment M, nous aurons deux conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned} \left| EJ_1 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P \frac{\partial y}{\partial x} - M \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \\ \left| EJ_2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + P \frac{\partial z}{\partial x} + M \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Si, lors de la flexion de la barre, le plan d'action du moment M tourne avec la section frontale, on aura évidemment pour $x = l$, $M_{y_1} = M_{z_1} = 0$ et nous aurons alors deux conditions:

$$\left|\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0. \tag{6}$$

Si lors de la flexion de la barre, le plan d'action du moment M ne tourne pas, alors pour $x = l$, nous aurons $M_{y_1} = M\,\partial z/\partial x$ et $M_{z_1} = -M\,\partial y/\partial x$, et

$$\left.\begin{aligned} \left|EJ_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - M\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \\ \left|EJ_2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + M\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Enfin, dans le cas d'un moment « suivant à moitié » le mouvement du système,

$$\left.\begin{aligned} \left|EJ_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - M\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Passons maintenant aux paramètres adimensionnels. Pour cela, supposons que

$$y = Yle^{i\omega At}, \quad z = \sqrt{\frac{EJ_2}{EJ_1}}\,Zle^{i\omega At},$$

Y et Z étant les fonctions adimensionnelles cherchées qui dépendent seulement de x, ω la fréquence adimensionnelle, tandis que

$$A = \sqrt{\frac{EJ_1}{\rho F l^4}}.$$

En qualité de variable indépendante prenons, à la place de x, $\zeta = x/l$. Après substitution de x, y et z dans les équations (4), nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^4 Y}{d\zeta^4} - M_0\frac{d^3 Z}{d\zeta^3} + \beta^2\frac{d^2 Y}{d\zeta^2} - \omega^2 Y = 0, \\ \frac{d^4 Z}{d\zeta^4} + M_0\frac{d^3 Y}{d\zeta^3} + \frac{\beta^2}{k^2}\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} - \frac{\omega^2}{k^2}Z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ici, M_0 et β^2 sont le moment et la force adimensionnels:

$$M_0 = \frac{Ml}{\sqrt{EJ_1 EJ_2}}, \quad \beta^2 = \frac{Pl^2}{EJ_1}.$$

La grandeur k caractérise le rapport entre les rigidités

$$k = \sqrt{\frac{EJ_2}{EJ_1}}.$$

L'on suppose que EJ_1 est la plus petite rigidité, c'est pourquoi $k \geqslant 1$.

En employant les paramètres adimensionnels, transformons également les conditions aux limites.

Pour $\zeta = 0$, nous avons $Y = Z = 0, \frac{dY}{d\zeta} = \frac{dZ}{d\zeta} = 0$.

Pour l'extrémité de la barre, c'est-à-dire pour $\zeta = 1$, nous obtenons dans le cas de sollicitation par un moment dont le plan tourne avec la section frontale

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{d^3Y}{d\zeta^3} + \beta^2 \frac{dY}{d\zeta} - M_0 \frac{d^2Z}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=1} &= 0, \\ \left|\frac{d^3Z}{d\zeta^3} + \frac{\beta^2}{k^2} \frac{dZ}{d\zeta} + M_0 \frac{d^2Y}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=1} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left|\frac{d^2Y}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=1} = 0, \qquad \left|\frac{d^2Z}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=1} = 0. \tag{11}$$

Dans le cas d'un moment dont le plan ne se retourne pas, les deux premières conditions restent les mêmes, tandis que les deux dernières prennent la forme suivante

$$\left|\frac{d^2Y}{d\zeta^2} - M_0 \frac{dZ}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 0, \qquad \left|\frac{d^2Z}{d\zeta^2} + M_0 \frac{dY}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 0. \tag{12}$$

Dans le cas d'un moment « suivant à moitié » le mouvement de la section, les conditions (10) restent également en vigueur et, à la place des expressions (11), nous obtenons

$$\left|\frac{d^2Y}{d\zeta^2} - M_0 \frac{dZ}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 0, \quad \left|\frac{d^2Z}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=1} = 0. \tag{13}$$

Pour résoudre le problème, la méthode la plus rationnelle est celle d'ordinateurs. L'algorithme a été déjà élaboré lors de la résolution des problèmes précédents.

Supposons que

$$Y = \sum A_n \zeta^n, \qquad Z = \sum B_n \zeta^n$$

et mettons Y et Z dans les équations (9), après quoi, nous obtenons les formules de récurrence suivantes

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} [M_0 B_{n-1} (n-1)(n-2)(n-3) - \\ &\qquad - \beta^2 A_{n-2} (n-2)(n-3) + \omega^2 A_{n-4}], \\ B_n &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \Big[- M_0 A_{n-1} (n-1)(n-2)(n-3) - \\ &\qquad - \frac{\beta^2}{k^2} B_{n-2} (n-2)(n-3) + \frac{\omega^2}{k^2} B_{n-4} \Big]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Comme dans l'encastrement $Y = Z = 0, \frac{dY}{d\zeta} = \frac{dZ}{d\zeta} = 0$, on aura évidemment

$$A_0 = A_1 = B_0 = B_1 = 0.$$

Quatre coefficients encore, A_2, A_3, B_3 et B_2, doivent être choisis de façon à assurer que les conditions aux limites, à l'extrémité de la barre, c'est-à-dire pour $\zeta = 1$, soient remplies. Pour cela, référons-nous aux expressions (10) et aussi, en fonction des conditions de sollicitation, aux expressions (11), ou (12), ou (13).

Comme les coefficients A_2, A_3, B_2 et B_3 entrent linéairement dans toutes les expressions citées, on peut écrire dans la forme suivante les quatre équations par rapport à ces coefficients:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}A_2 + a_{12}A_3 + a_{13}B_2 + a_{14}B_3 = 0\,, \\ a_{21}A_2 + a_{22}A_3 + a_{23}B_2 + a_{24}B_3 = 0\,, \\ a_{31}A_2 + a_{32}A_3 + a_{33}B_2 + a_{34}B_3 = 0\,, \\ a_{41}A_2 + a_{42}A_3 + a_{43}B_2 + a_{44}B_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Les deux premières équations s'obtiennent des expressions (10), tandis que les deux autres, soit de (11), soit de (12) ou de (13), en fonction du moment M supporté par la barre.

Si, pour une valeur fixée à l'avance des paramètres M_0, β, k et ω, on pose $A_2 = 1$ et $A_3 = B_2 = B_3 = 0$, on peut alors trouver, au moyen des formules de récurrence (14), A_4, B_4, A_5, B_5, . . . Puis, en additionnant jusqu'à un certain n, par exemple jusqu'à $n = 30$, nous trouvons les valeurs des dérivées des fonctions Y et Z pour $\zeta = 1$, c'est-à-dire

$$\left|\frac{dY}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = \sum A_n n\,; \quad \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = \sum B_n n,$$
$$\left|\frac{d^2Y}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=1} = \sum A_n n\,(n-1), \ldots$$

Les sommes trouvées sont mises dans les expressions (10) et (11) ou (12) ou (13). Nous obtenons respectivement les coefficients a_{11}, a_{21}, a_{31} et a_{41} du système (15). Si l'on répète à nouveau les mêmes opérations en supposant que $A_3 = 1$, tandis que $A_2 = B_2 = B_3 = 0$, nous trouverons, évidemment, les coefficients a_{12}, a_{22}, a_{32} et a_{42}. Puis, il faut prendre $B_2 = 1$ et, enfin, $B_3 = 1$. Après avoir répété quatre fois ce cycle, nous trouverons, en définitive, tous les coefficients du système (15).

Les conditions d'existence de solutions non nulles pour Y et Z est l'égalité à zéro du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = D = 0. \tag{16}$$

Ainsi, l'étude de la stabilité se ramène à la détermination de telles relations entre M_0, β, ω et k pour lesquelles la condition (16) soit remplie. En pratique, il faut en premier lieu fixer le paramètre k,

puis, β et enfin, M_0. Donnant à ω diverses valeurs, choisissons celle pour laquelle le déterminant D devient nul. On change ensuite M_0 et, de nouveau, on choisit ω. C'est de cette façon que, pour β et k fixés, on détermine la dépendance de ω par rapport à M_0. La fig. 410 représente une telle dépendance pour $k = 2$.

Il est évident qu'il n'y a aucune nécessité de tracer tous les graphiques et d'enregistrer toutes les informations. Il n'est pas difficile d'introduire dans l'algorithme du programme des indices par

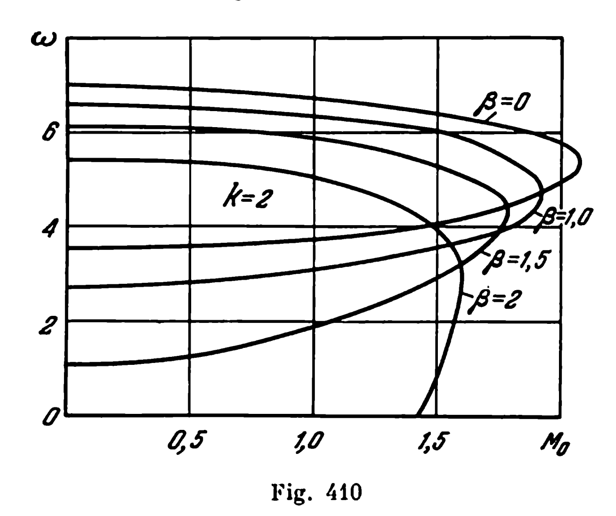


Fig. 410

lesquels l'on pourra juger du comportement de la fréquence en fonction de M_0 et de β. Si la fréquence devient nulle, cela signifie qu'une nouvelle forme d'équilibre a été trouvée. Si les fréquences de deux premières formes coïncident, cela signifie qu'on a trouvé une forme de mouvement. Naturellement, le rapport k^2 entre les rigidités doit rester inchangé au cours de ce repérage.

La fig. 411 représente les résultats du repérage des valeurs critiques pour les paramètres β et M_0. Pour les conditions aux limites (11) et (12), ils sont tout à fait identiques. En d'autres mots, la différence entre la sollicitation par un moment qui suit le mouvement du système et la sollicitation par un moment ne suivant pas ce mouvement ne se fait pas sentir. Pour chaque valeur fixée de $k = \sqrt{EJ_2/EJ_1}$, la zone de stabilité (fig. 411) est délimitée par un quadrilatère curviligne $OABC$. Le point A est commun pour toutes les courbes. Ici $\beta = \frac{\pi}{2} = \sqrt{Pl^2/EJ_1}$, ce qui correspond à la valeur de la force critique

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_1}{4l^2}.$$

Les courbes AB donnent les conditions de passage à une nouvelle forme d'équilibre et correspondent à la flexion dans le plan de rigidite

minimale (EJ_1). Il est curieux que la force critique augmente avec l'augmentation du moment. Cela se produit parce que le moment appliqué oblige la barre en flexion à dévier du plan de rigidité minimale.

La partie supérieure des courbes ABD représentées sur la fig. 411 correspond à une forme d'équilibre liée à la flexion dans le plan de

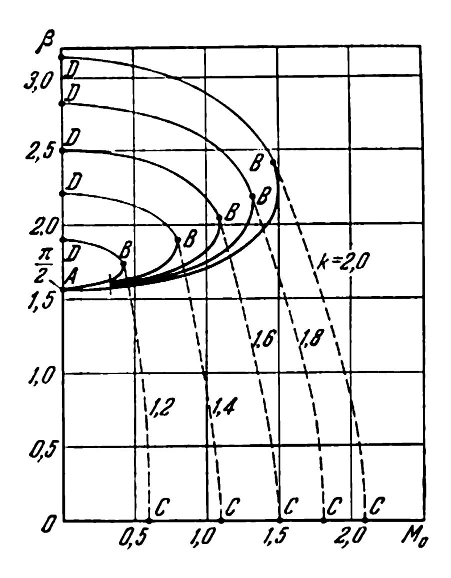


Fig. 411

rigidité maximale. La valeur du paramètre β dans les points D est k fois plus grande que dans le point A.

A droite, la zone de stabilité se trouve limitée par la condition de passage à une forme oscillatoire de mouvement. Sur la fig. 411, les limites de ce passage sont marquées par des lignes en pointillé BC.

Pour $k \to 1$, la zone de stabilité se transforme en un segment de droite OA. Le point D se confond avec A, tandis que C avec le point O.

Pour un moment « suivant à moitié » le mouvement de la section frontale, on n'observe pas, comme il fallait s'y attendre, de formes de mouvement avec amplitude croissante. Pour des valeurs déterminées de M et P, seules des formes nouvelles d'équilibre apparaissent ($\omega = 0$).

Ici, la détermination des états critiques pourrait aussi se faire de façon analytique, cependant, dans le cas où il y a un programme déjà ajusté, on n'a aucun intérêt à agir ainsi, et il est beaucoup plus commode de confier tous les calculs à l'ordinateur d'après un algorithme déjà élaboré.

Les courbes limitant la zone de stabilité sont représentées sur la fig. 412, et se passent de tout commentaire.

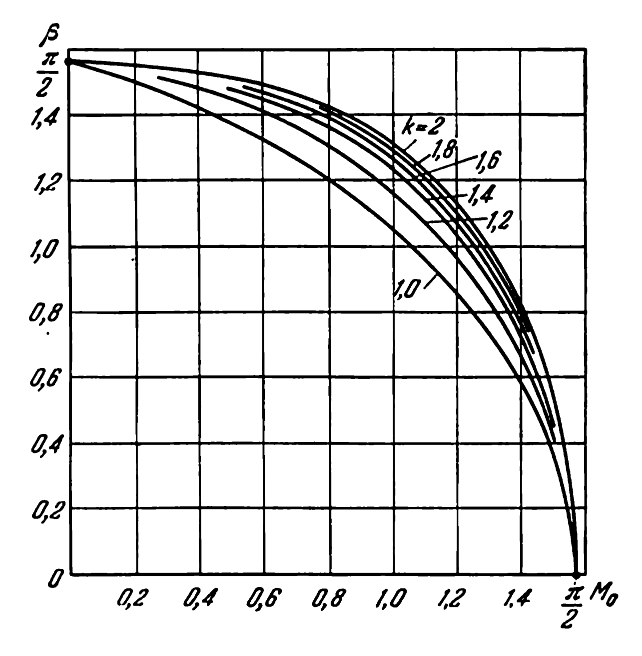


Fig. 412

149. Revenons à la solution du problème 119. L'on se convainc facilement de ce qu'une conduite encastrée à une extrémité n'a d'autres formes d'équilibre que la forme initiale rectiligne. Effectivement, de la solution du problème 119, servons-nous de la formule

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + Cx + D,$$

mais avec d'autres conditions aux limites, notamment :

$$\text{pour} \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y' = 0,$$
$$\text{pour} \quad x = l, \quad y'' = 0 \quad \text{et} \quad y''' = 0,$$

d'où

$$B + D = 0, \; A\alpha + C = 0,$$
$$A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0,$$
$$A \cos \alpha l - B \sin \alpha l = 0.$$

Des deux dernières expressions il découle que pour A et B il existe des solutions non nulles si

$$\sin^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l = 0,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, $A = B = C = D = 0$, et la conduite n'a pas de formes d'équilibre différentes de la forme initiale rectiligne.

Il faut donc chercher les formes de mouvement. Remarquons, à ce propos, que l'existence de telles formes se conçoit facilement si à travers un boyau souple en caoutchouc on fait passer, sous une pression suffisante, de l'air à partir d'un compresseur. Un mouvement oscillatoire exactement identique s'observe quand on fait passer de

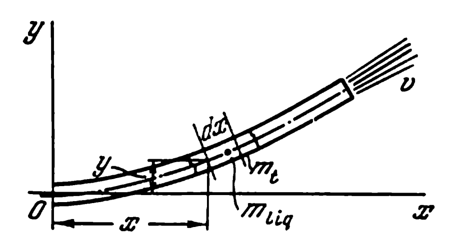


Fig. 413

l'eau à travers un boyau au repos comme ça se fait, par exemple, quand on porte de l'eau sur une patinoire couverte de glace mouillée et glissante.

Supposons que la masse de la conduite par unité de longueur est m_c, tandis que la masse du liquide, également par unité de longueur, est m_l. Sur un tronçon dx (fig. 413) nous avons respectivement les masses $m_c\,dx$ et $m_l\,dx$. Quand la conduite est en mouvement transversal, sur le tronçon dx apparaît une force d'inertie égale à

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial t}(m_c + m_l)\,dx.$$

Etant donné que le flux de particules tourne avec une vitesse angulaire $\partial^2 y/\partial x\,\partial t$ une accélération de Coriolis se créera. La force d'inertie correspondante sera :

$$-2\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}v^2 m_l\,dx.$$

Ecrivons avec le même signe l'expression donnant la force liée à la courbure de l'écoulement (ou à l'accélération normale):

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}v^2 m_l\,dx.$$

La somme de ces forces, divisée par dx, donne l'intensité de la sollicitation transversale « externe ». Par conséquent,

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(m_c + m_l) - 2\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}vm_l - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}v^2 m_l.$$

Passons maintenant à la forme adimensionnelle. Supposons que

$$y = Yle^{(\varepsilon+i\omega)At}; \quad A = \sqrt{\frac{EJ}{(m_c+m_l)\,l^4}}; \quad x = l\zeta. \tag{1}$$

Nous obtiendrons alors:

$$\frac{d^4Y}{d\zeta^4} + \beta^2 \frac{d^2Y}{d\zeta^2} + 2\beta\varkappa(\varepsilon + i\omega)\frac{dY}{d\zeta} + (\varepsilon + i\omega)^2 Y = 0, \tag{2}$$

avec

$$\beta = v\sqrt{\frac{m_l l^2}{EJ}}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{m_l}{m_c+m_l}}. \tag{3}$$

Le premier paramètre caractérise le débit du liquide à travers la conduite; le second, le rapport entre la masse du liquide et celle de la conduite.

Dans l'encastrement, pour $\zeta = 0$, $Y = 0$ et $dY/d\zeta = 0$. Sur l'extrémité de la conduite, pour $\zeta = 1$, nous avons

$$\frac{d^2Y}{d\zeta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^3Y}{d\zeta^3} = 0.$$

Le problème se ramène maintenant à la détermination des zones de variations des paramètres β et $\varkappa$ pour lesquels la partie réelle ε de l'exposant $\varepsilon + i\omega$ (1) prend des valeurs positives.

Sans oublier que l'opération de repérage sera confiée à l'ordinateur, posons

$$Y = \sum C_n \zeta^n.$$

Des deux premières conditions aux limites il découle que $C_0 = C_1 = 0$. Les deux autres conditions prennent la forme suivante

$$\sum C_n n(n-1) = 0, \quad \sum C_n n(n-1)(n-2) = 0. \tag{4}$$

En supposant indéterminés les coefficients C_2 et C_3, écrivons les équations (4) sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} aC_2 + bC_3 = 0, \\ cC_2 + dC_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

La condition d'existence des solutions non nulles sera, évidemment, la suivante:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0. \tag{6}$$

Passons maintenant de la forme complexe des équations à la forme réelle. Supposons que

$$Y = Y_1 + iY_2$$

et, conformément à cela,

$$C_n = A_n + iB_n, \quad Y_1 = \sum A_n \zeta^n, \quad Y_2 = \sum B_n \zeta^n.$$

Mettant Y dans l'équation (2) et séparant sa partie réelle de sa partie imaginaire, nous obtiendrons des formules de récurrence pour la détermination de A_n et B_n :

$$\left.\begin{aligned} A_n = {} & \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} [-\beta^2 A_{n-2}(n-2)(n-3) - \\ & - 2\beta\varkappa\varepsilon A_{n-3}(n-3) + (\omega^2 - \varepsilon^2) A_{n-4} + \\ & + 2\beta\varkappa\omega B_{n-3}(n-3) + 2\omega\varepsilon B_{n-4}], \\ B_n = {} & \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} [-\beta^2 B_{n-2}(n-2)(n-3) - \\ & - 2\beta\varkappa\varepsilon B_{n-3}(n-3) + (\omega^2 - \varepsilon^2) B_{n-4} - \\ & - 2\beta\varkappa\omega A_{n-3}(n-3) - 2\omega\varepsilon A_{n-4}]. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Séparons également dans l'équation (6) ses parties réelle et imaginaire en posant

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad c = c_1 + ic_2, \quad d = d_1 + id_2.$$

Nous obtiendrons alors deux équations :

$$\left.\begin{aligned} D_1 = a_1 d_1 - a_2 d_2 - b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0, \\ D_2 = a_1 d_2 - a_2 d_1 - b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Si l'on pose $C_2 = 1$ ($A_2 = 1$, $B_2 = 0$) tandis que $C_3 = 0$ ($A_3 = B_3 = 0$) on verra, en comparant les expressions (4) et (5), que la première somme (4) est égale à a, tandis que la deuxième à c. Par conséquent, pour $A_2 = 1$ et $B_2 = A_3 = B_3 = 0$, nous avons :

$$a_1 = \sum A_n n(n-1), \qquad a_2 = \sum B_n n(n-1),$$
$$c_1 = \sum A_n n(n-1)(n-2), \qquad c_2 = \sum B_n n(n-1)(n-2).$$

Par contre, si nous posons $C_2 = 0$ et $C_3 = 1$, c'est-à-dire si nous supposons que $A_2 = B_2 = B_3 = 0$, $A_3 = 1$ et calculons d'après les formules de récurrence les coefficients A_n et B_n, nous obtiendrons

$$b_1 = \sum A_n n(n-1), \qquad b_2 = \sum B_n n(n-1),$$
$$d_1 = \sum A_n n(n-1)(n-2), \qquad d_2 = \sum B_n n(n-1)(n-2)$$

De cette façon se calculent les grandeurs qui figurent dans l'équation (8).

Telle est la succession des calculs sur ordinateur.

Il faut d'abord rédiger un programme pour le calcul des grandeurs D_1 et D_2 (8) pour des paramètres $\varkappa$, β, ω et ε fixés. Les séries entières convergent rapidement et, même pour $n > 30$ les grandeurs A_n et B_n ont, en général, des valeurs plus petites que le zéro de l'ordinateur.

Puis, pour $\varkappa$ et β fixés, déterminons ε et ω tels que soit satisfait le système (8). On réalise le repérage à l'aide d'une simple interpolation linéaire. En fixant trois points sur le plan ε, ω, déterminons

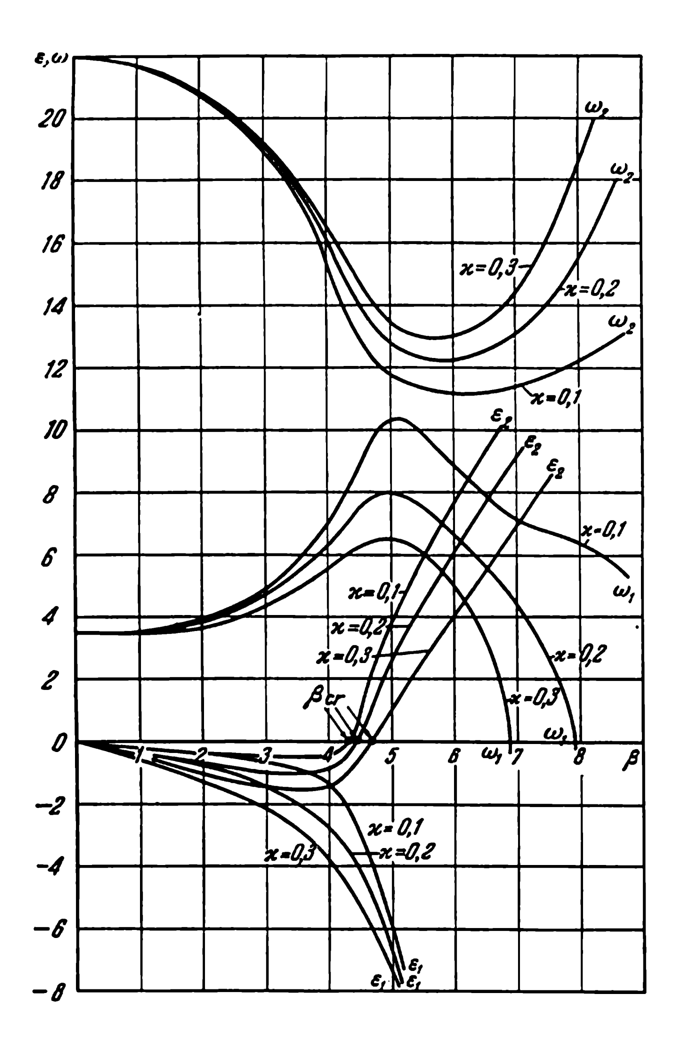


Fig. 414

trois valeurs de D_1 et D_2 (8) correspondant à ces trois points. D'après ces trois valeurs de D_1 et D_2, construisons dans l'espace deux plans:

$$D_1 = D_1(\varepsilon;\ \omega) \quad \text{et} \quad D_2 = D_2(\varepsilon;\ \omega).$$

La ligne de leur intersection coupe le plan ε, ω en un point dont les coordonnées correspondent aux racines du système (8). Puis, on passe à l'approximation suivante jusqu'à ce que soit remplie la condition de précision donnée. Si l'on effectue les calculs en variant le paramètre β, on peut suivre le processus de variation de la fréquence ω et du paramètre d'amortissement ε en fonction de la vitesse

du débit pour un $\varkappa$ donné, c'est-à-dire pour un rapport donné entre la masse du liquide et celle de la conduite.

La fig. 414 montre quelques-unes de ces courbes. Détail particulier : dans le problème étudié, on n'observe pas la coïncidance des fréquences qu'on avait rencontrée plus haut. Cela est lié au fait que la vitesse du liquide non seulement joue un rôle de stimulant mais encore constitue un facteur d'amortissement qui se manifeste dans la présence des forces de Coriolis. Même pour une vitesse très petite v, il y aura amortissement, et les racines de l'équation caractéristique seront non pas imaginaires, mais bien complexes.

Avec l'augmentation de la vitesse du débit, la première fréquence ω (pour de petits $\varkappa$) augmente d'abord et puis commence à décroître pour devenir égale à zéro mais, dans tous les cas, ε reste négatif.

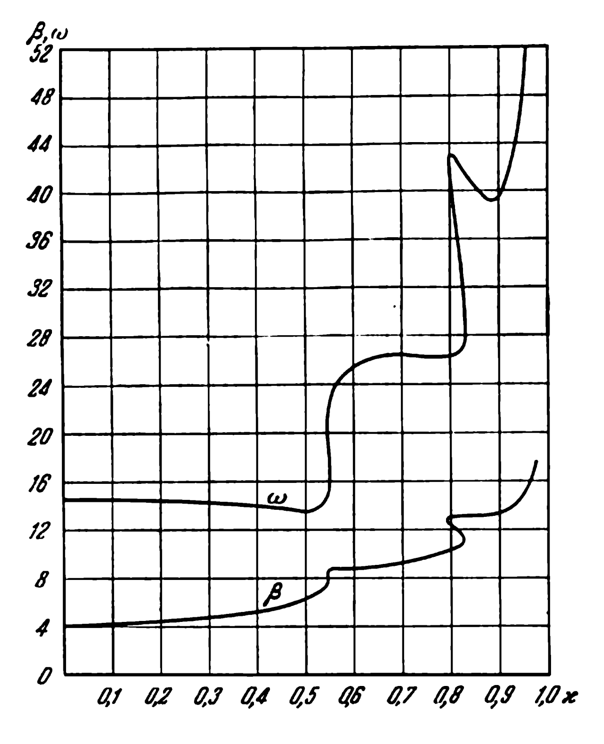


Fig. 415

Cela signifie qu'il n'y aura pas de perturbations croissantes selon une forme correspondant au premier ton, mais que, par contre, aura lieu un amortissement soit oscillatoire soit apériodique.

Le premier passage de ε dans la zone positive a lieu pour des fréquences correspondant au deuxième ton. Sur le graphique, les courbes correspondantes (fig. 414) sont marquées d'un index (ε_2, ω_2).

La courbe de dépendance de la fréquence ω des oscillations et de la vitesse critique β du débit par rapport au paramètre

$$\varkappa=\sqrt{\frac{m_1}{m_c+m_1}}$$

(fig. 415) a un aspect bizarre. Pour $\varkappa < 0,545$, ce sont les oscillations du second ton qui sont stimulées. Pour un $\varkappa$ plus grand, apparaissent des oscillations du troisième ton, ce qui se manifeste par une brusque augmentation de la fréquence. Puis, pour une masse relative plus grande du liquide, les oscillations se feront selon le quatrième ton et les fréquences augmenteront. Dans le cas limite quand la masse de la conduite est petite par comparaison avec la masse du liquide, la fréquence et la vitesse critique croissent de façon illimitée. Si la masse de la conduite est égale à zéro le système est stable pour n'importe quelle vitesse du débit.

150. Supposons que les sections transversales de la bande ne s'incurvent pas. Dans ce cas, les allongements axiaux peuvent être

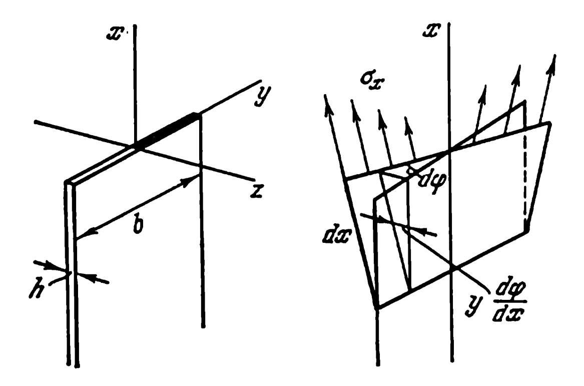


Fig. 416

représentés sous forme de fonction linéaire de y (fig. 416):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \varkappa y,$$

$\varkappa$ étant la variation de la courbure de la bande dans le plan xy. La contrainte axiale sera, de toute évidence, la suivante:

$$\sigma_x = E\,(\varepsilon_0 + \varkappa y - \alpha t),$$

αt étant l'allongement thermique.

Comme la force normale dans la section et le moment fléchissant M_z sont nuls, on aura

$$\int_F \sigma_x\,dF=0, \quad \int_F \sigma_x y\,dF=0,$$

de là

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{b} \int\limits_{-b/2}^{+b/2} \alpha t \, dy, \quad \varkappa = \frac{12}{b^3} \int\limits_{-b/2}^{+b/2} \alpha t y \, dy.$$

Avec l'apparition de la torsion, les contraintes σ_x créent, par rapport à l'axe x (fig. 416), un moment égal à

$$M_x = \int\limits_F \frac{y \, d\varphi}{dx} \sigma_x y \, dF,$$

ou

$$M_x = \frac{d\varphi}{dx} \int\limits_F \sigma_x y^2 \, dF.$$

En outre, lors de la torsion, dans la bande apparaît un moment dû aux contraintes tangentielles et égal, comme on sait, à

$$M_\tau = \frac{1}{3} bh^3 G \frac{d\varphi}{dx}.$$

La somme de ces moments est égale à zéro, aussi

$$\frac{1}{3} bh^3 G + \int\limits_F \sigma_x y^2 \, dF = 0.$$

Mettant ici σ_x, trouvons

$$-\int\limits_{-b/2}^{+b/2} (\varepsilon_0 + \varkappa y - \alpha t) y^2 \, dy = \frac{bh^2}{6(1+\mu)},$$

μ étant le coefficient de Poisson. Excluant ε_0, nous obtiendrons:

$$\int\limits_{-b/2}^{+b/2} \alpha t \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right) dy = \frac{bh^2}{6(1+\mu)}. \qquad (1)$$

C'est là la condition de passage à une nouvelle forme d'équilibre.

Remarquons que si la loi de distribution des allongements thermiques le long de l'axe y est linéaire, c'est-à-dire si

$$\alpha t = A + By,$$

le premier membre de l'expression (1) s'annule pour n'importe quelles valeurs de A et B. Par conséquent, pour une distribution linéaire de la température, il n'y a pas de nouvelle forme d'équilibre.

Supposons que, sur la moitié gauche de la bande, les allongements thermiques sont répartis suivant une loi quadratique

$$\alpha t = \frac{4\alpha t_1}{b^2} y^2$$

(fig. 417). L'expression (1) prend alors la forme suivante:

$$\int_{-b/2}^{0} \frac{4\alpha t_1}{b^2} y^2 \left(y^2 - \frac{b^2}{12}\right) dy = \frac{bh^2}{6(1+\mu)},$$

ou

$$\alpha t_{1\,\mathrm{cr}} = \frac{15}{1+\mu} \frac{h^2}{b^2}.$$

Remarquons que, plus la bande est relativement mince, plus basse est la température à laquelle se produit la perte de stabilité (distorsion).

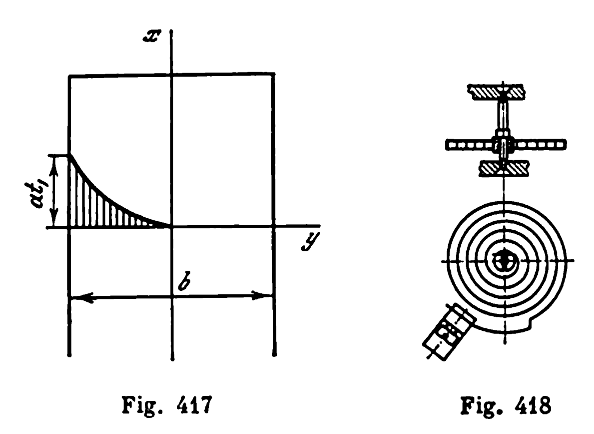


Fig. 417 Fig. 418

151. Dans ce cas, la poutre peut également connaître une perte de stabilité de sa forme plane de flexion; mais cela aura lieu déjà pour de grands déplacements, propres à une poutre fortement incurvée, ce qui exclut l'emploi de la théorie habituelle de la stabilité de la forme plane de flexion.

Quand on parle d'incurvation latérale d'une bande dotée d'une section rectangulaire mince, on ajoute le terme « mince », non pas pour montrer, comme cela pourrait paraître à première vue, que dans le cas contraire il n'y aurait pas d'incurvation, mais bien pour souligner qu'au moment où survient la perte de stabilité, la bande ne connaît presque pas d'incurvation dans le plan de flexion.

Un exemple éloquent du fait qu'une bande soumise à la flexion dans le plan de rigidité minimale peut connaître une perte de stabilité de la forme plane de flexion, est constitué par le phénomène dit entortillement de la spirale dans les appareils.

On appelle spirale un ressort spiral bien connu de tous qu'on place sur l'axe du balancier des montres de poche ou des montres bracelets (fig. 418), ainsi que sur l'axe de l'aiguille dans la plupart des appareils de mesure: manomètres, baromètres, indicateurs de vitesse dans les avions, altimètres, voltmètres, ampèremètres et autres appareils.

Le ruban de la spirale placée dans un appareil est soumis à la flexion dans le plan de rigidité minimale. Sous un certain angle de rotation de l'axe, qu'on appelle d'ordinaire angle d'entortillement, la spirale connaît une perte de stabilité de sa forme plane de flexion : elle s'entortille. C'est pourquoi l'angle de rotation de service se fait toujours plus petit que l'angle d'entortillement.

152. Le problème proposé offre un terrain assez large d'investigations. D'une part, on peut se limiter à l'étude de la stabilité par rapport à un chavirement à symétrie axiale. Une telle résolution n'offre guère de difficultés. D'autre part, il est d'intérêt à examiner l'existence des formes non symétriques d'équilibre et à établir les conditions à remplir pour que l'anneau quitte, avec torsion, le plan de la courbure. Ici, il est indispensable d'établir au préalable des équations d'équilibre d'une forme un peu plus générale que celles utilisées pour l'étude de la stabilité de la forme plane de flexion.

Etudions d'abord la stabilité de l'anneau par rapport à un chavirement à symétrie axiale.

Fig. 419

Au point A ayant pour coordonnées x, y (fig. 419), par suite de l'opération préliminaire de retournement, apparaît une déformation initiale tangentielle $\varepsilon = 2x/R$. Communiquons à l'anneau une petite déviation angulaire ϑ axialement symétrique. Le point A prendra la position A' et il apparaît un allongement supplémentaire égal au rapport de la projection du segment AA' sur l'axe x au rayon R:

$$\Delta\varepsilon = \frac{OA}{R}\left[\cos(\alpha - \vartheta) - \cos\alpha\right].$$

Comme l'angle ϑ est petit, remplaçons $\sin\vartheta$ par ϑ et $\cos\vartheta$ par $1 - \frac{\vartheta^2}{2}$; on aura alors

$$\varepsilon + \Delta\varepsilon = \frac{2x}{R} + \frac{1}{R}\left(y\vartheta - x\frac{\vartheta^2}{2}\right).$$

L'énergie potentielle des déformations élastiques sera

$$U = \frac{1}{2} E \int\limits_s \int\limits_F (\varepsilon + \Delta\varepsilon)^2 \, dF \, ds ;$$

dans cette expression, l'intégration se fait sur tout l'arc de cercle s ainsi que sur l'aire de la section transversale F.

Comme les déformations sont à symétrie axiale $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ ne dépend pas de s, et alors

$$U = \frac{\pi E}{R} \int\limits_F \left(2x - x\frac{\vartheta^2}{2} + y\vartheta\right)^2 dF,$$

ou

$$U = \frac{\pi E}{R}\left[\left(2 - \frac{\vartheta^2}{2}\right)^2 J_y + J_x\vartheta^2\right],$$

J_x et J_y étant les moments d'inertie de la section par rapport aux axes principaux x et y.

La dérivée de U par rapport à ϑ a la forme suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = \frac{\pi E}{R}\left[-2\left(2 - \frac{\vartheta^2}{2}\right)\vartheta J_y + 2J_x\vartheta\right].$$

Cette dérivée s'annule pour $\vartheta = 0$. Par conséquent, l'anneau retourné à l'envers se trouve en position d'équilibre. Pour établir si cette position d'équilibre est stable ou instable, calculons la dérivée seconde

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2}\right|_{\vartheta=0} = \frac{\pi E}{R}(-4J_y + 2J_x).$$

Pour $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2}\right|_{\vartheta=0} > 0$, la position d'équilibre est stable, pour $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2}\right|_{\vartheta=0} < 0$, elle est instable. Par conséquent, pour un anneau retourné à l'envers, la condition de stabilité par rapport à des perturbations à symétrie axiale est la suivante:

$$J_x > 2J_y,$$

ou

$$b > h\sqrt{2}.$$

Passons maintenant à l'étude complète de la question.

Etablissons les équations d'équilibre d'une poutre incurvée dans le plan principal, dans le cas où il y a de faibles perturbations ayant trait à la torsion et à la flexion dans le second plan. Faisons cela dans une forme un peu plus générale qu'il n'aurait fallu pour le problème en question, cela dans le but de pouvoir nous servir, dans la suite, des équations obtenues.

Cela étant dit, supposons que nous avons un élément de la poutre de longueur ds, légèrement incurvé (fig. 420). Dans les sections transversales apparaissent six facteurs d'efforts ayant des accroissements correspondants. Par simplification, ils ne sont pas montrés sur le dessin.

Dans l'état précritique, seuls les efforts se trouvant dans le plan de la courbure: M_0, Q_{x0} et N_0, sont différents de zéro. Après que la poutre ait été soumise à une flexion supplémentaire et à une torsion, apparaîtront des efforts supplémentaires: Q_x, Q_y, N, M_x, M_y et M_t dont la valeur est considérée comme étant petite.

Désignons par p et q les petits changements de la courbure dans les plans yz et xz, tandis que par r, la torsion ; établissons les équations linéaires d'équilibre pour l'élément en déformation. Le principe de linéarisation employé ici est tout à fait ordinaire. Les efforts de l'état précritique sont introduits dans les équations d'équilibre en

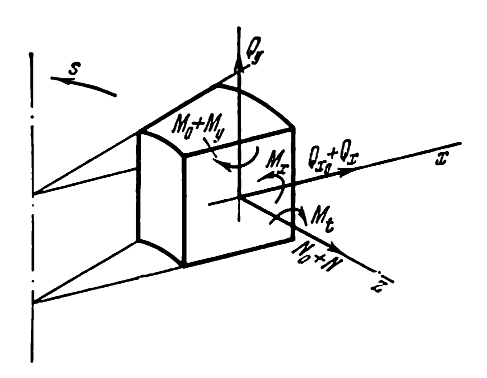


Fig. 420

tenant compte de la modification de la forme de l'élément, tandis que les efforts supplémentaires, petits, sans tenir compte de la modification de la forme, c'est-à-dire d'après la forme correspondant à l'état précritique.

Dans le but de rendre cette procédure plus compréhensible, établissons de façon détaillée la première équation d'équilibre. Egalons à zéro la somme des projections de toutes les forces sur l'axe x :

$$Q_{x_0}+Q_x-(Q_{x_0}+Q_x+dQ_{x_0}+dQ_x)-$$
$$-(N_0+N+dN_0+dN)\times\left(\frac{1}{R}+q\right)ds-(Q_y+dQ_y)\,r\,ds=0.$$

Rejetons les grandeurs d'ordre supérieur de petitesse ainsi que les produits de Q_x par q et de Q_y par r. Nous obtiendrons alors

$$-Q'_{x_0}-Q'_x-\frac{N_0}{R}+N_0q+\frac{N}{R}=0.$$

Dans l'état précritique, $Q_x=N=0$, $q=0$, et c'est la raison pour laquelle

$$Q'_{x_0}+\frac{N_0}{R}=0. \tag{A}$$

Additionnons la première et la seconde équation. Alors,

$$Q'_x+N_0q+\frac{N}{R}=0.$$

De façon analogue nous obtiendrons encore cinq équations en égalant à zéro les sommes des projections des forces sur les axes y et z ainsi que les sommes des moments par rapport aux trois axes.

Ecrivons-les toutes:

$$Q'_x + N_0 q + \frac{N}{R} = 0, \tag{1}$$

$$Q'_y + rQ_{x0} - pN_0 = 0, \tag{2}$$

$$N' - Q_{x0} q - \frac{Q_x}{R} = 0, \tag{3}$$

$$M'_x + \frac{M_t}{R} - Q_y - M_0 r = 0, \tag{4}$$

$$M'_y + Q_x = 0, \tag{5}$$

$$M'_t - \frac{M_x}{R} + M_0 p = 0. \tag{6}$$

En guise de complément à l'équation (A), nous obtenons encore deux équations d'équilibre pour l'état précritique: en tout, trois équations

$$Q'_{x0} + \frac{N_0}{R} = 0, \tag{7}$$

$$N'_0 - \frac{Q_{x0}}{R} = 0, \tag{8}$$

$$M'_0 + Q_x = 0. \tag{9}$$

Dans toutes les équations écrites plus haut, on comprend sous $1/R$ la courbure de la poutre dans l'état précritique; cette courbure est liée avec la valeur du moment M_0.

Les changements de la courbure p et q ainsi que la torsion r sont proportionnels aux moments M_x, M_y et M_t:

$$M_x = EJ_x p,$$

$$M_y = EJ_y q,$$

$$M_t = GJ_t r.$$

Passons maintenant des équations générales au problème en question. Pour un anneau retourné à l'envers, les équations (1)-(6) se trouvent simplifiées par le fait que $N_0 = Q_{x_0} = 0$, tandis que M_0 et $1/R$ sont constants. C'est pourquoi

$$Q'_x + \frac{N}{R} = 0, \tag{10}$$

$$Q'_y = 0, \tag{11}$$

$$N' - \frac{Q_x}{R} = 0, \tag{12}$$

$$M'_x + \frac{M_t}{R} - Q_y - M_0 r = 0, \tag{13}$$

$$M'_y + Q_x = 0, \tag{14}$$

$$M'_t - \frac{M_x}{R} + M_0 p = 0 \tag{15}$$

Dérivons l'équation (13) par rapport à s en tenant compte que $Q'_y = 0$. En définitive, nous aurons:

$$M''_x + \frac{1}{R} M'_t - M_0 r' = 0,$$

ou

$$EJ_x p'' + \left(\frac{1}{R} GJ_t - M_0\right) r' = 0.$$

L'équation (15) prend la forme suivante

$$GJ_t r' = \left(\frac{1}{R} EJ_x - M_0\right) p. \tag{16}$$

Excluons r:

$$p'' + \frac{k^2}{R^2} p = 0,$$

avec

$$k^2 = \frac{R^2}{EJ_x GJ_t} \left(\frac{1}{R} GJ_t - M_0\right)\left(\frac{1}{R} EJ_x - M_0\right). \tag{17}$$

Ainsi, nous obtenons

$$p = A \sin \frac{ks}{R} + B \cos \frac{ks}{R},$$

$$r = \frac{1}{GJ_t}\left(\frac{1}{R} EJ_x - M_0\right) \frac{R}{k}\left(-A \cos \frac{ks}{R} + B \sin \frac{ks}{R}\right) + C.$$

Comme l'anneau est fermé, les fonctions p et r doivent être périodiques, c'est-à-dire doivent reprendre leurs valeurs antérieures quand s change d'une valeur égale à $2\pi r$. Par conséquent, la grandeur k doit être un nombre entier.

Pour un anneau retourné à l'envers,

$$M_0 = \frac{2}{R} EJ_y,$$

et de l'expression (17) nous obtenons

$$n^2 = \left(1 - 2\frac{EJ_y}{GJ_t}\right)\left(1 - 2\frac{EJ_y}{EJ_x}\right), \tag{18}$$

n étant un nombre quelconque.

Si $EJ_x = 2EJ_y$, on aura $n = 0$ et nous aboutissons au cas d'un chavirement à symétrie axiale de l'anneau. Posons maintenant $EJ_x > 2EJ_y$. Dans ce cas, le second facteur du deuxième membre dans l'expression (18) sera positif. Déterminons le signe du premier facteur

$$1 - 2\frac{EJ_y}{GJ_t} = 1 - 2\frac{2E\frac{bh^3}{12}}{\frac{E}{2(1+\mu)}\beta bh^3} = 1 - \frac{1+\mu}{3\beta}.$$

Le coefficient de rigidité à la torsion β d'une poutre de section rectangulaire est plus petit que 0,333. Par conséquent, l'équation qu'on vient d'écrire s'avère négative et c'est pourquoi $n^2 < 0$.

Ainsi, si $EJ_x > 2EJ_y$ ou, si $b > h\sqrt{2}$, on aura $n^2 < 0$ et il n'y aura pas de formes non symétriques d'équilibre. Cela signifie que la condition de stabilité d'un anneau retourné à l'envers

$$b > h\sqrt{2}$$

vaut tant pour les formes symétriques que pour les formes non symétriques de perte de stabilité.

153. La solution est entièrement décrite par les équations établies pour le problème précédent.

Si la chaleur est amenée à travers la surface interne, on aura $t_1 > t_2$ et dans l'anneau se crée un moment constant

$$M_0 = EJ_y\alpha\frac{t_1 - t_2}{h},$$

α étant le coefficient de dilatation thermique.

La grandeur k^2 (17) doit être un nombre entier

$$n^2 = \frac{R^2}{EJ_xGJ_t}\left(\frac{GJ_t}{R} - M_0\right)\left(\frac{EJ_x}{R} - M_0\right),$$

d'où

$$M_0 = \frac{1}{2R}\left[EJ_x + GJ_t \pm \sqrt{(EJ_x + GJ_t)^2 + 4EJ_xGJ_t(n^2 - 1)}\right].$$

La plus petite valeur positive de M_0 sera, pour $n = 0$,

$$M_{0cr} = \frac{EJ_x}{R}.$$

(Le cas $n = 0$ et $M_0 = \frac{GJ_t}{R}$ ne satisfait pas à la condition de continuité des déplacements.)

Si l'amenée de la chaleur se fait à travers la surface externe et $t_2 > t_1$, il faudra chercher pour M_0 une valeur négative qui soit la plus petite en valeur absolue. Cela se passera pour $n = 2$

$$|M_{0cr}| = \frac{1}{2R}\left[\sqrt{(EJ_x + GJ_t)^2 + 12EJ_xGJ_t} - EJ_x - GJ_t\right].$$

Ainsi, pour un échauffement de l'intérieur, la perte de stabilité se produit selon une forme symétrique, tandis que pour un échauffement interne, suivant une forme non symétrique et avec torsion.

154. Les équations établies lors de la résolution du problème 152 fournissent une réponse à la question posée.

Puisque $1/R = 0$, les équations (11), (13) et (15) prennent la forme suivante

$$Q'_y = 0, \quad M'_x - Q_y - M_0 r = 0,$$
$$M'_t + M_0 p = 0,$$

où la position des axes correspond à la fig. 421.

Faisons la substitution $M_x = EJ_x p$ et $M_t = GJ_t r$ et, excluant r, nous trouverons

$$p'' + \frac{M_0^2}{GJ_tEJ_x}p = 0.$$

Or $M_0 = \frac{EJ_y}{R}$ où l'on comprend sous R non plus le rayon de la courbure dans l'état précritique, mais bien le rayon initial de l'anneau non sectionné.

Soit la notation

$$\frac{(EJ_y)^2}{GJ_t EJ_x} = k^2.$$

Alors

$$p = A \sin \frac{ks}{R} + B \cos \frac{ks}{R}.$$

L'angle de rotation de la section par rapport à l'axe x se détermine à l'aide de l'intégration de p sur s:

$$\vartheta_x = A \frac{R}{k}\left(1 - \cos \frac{ks}{R}\right) + B \frac{R}{k} \sin \frac{ks}{R}.$$

Ici, la constante arbitraire d'intégration a déjà été choisie telle que pour $s = 0$ l'angle ϑ_x puisse s'annuler.

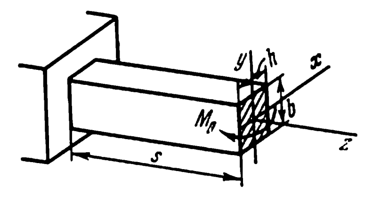


Fig. 421

Pour obtenir le déplacement transversal le long de l'axe y il faut intégrer encore une fois cette dernière expression par rapport à s:

$$y = A \frac{R}{k}\left(s - \frac{R}{k} \sin \frac{ks}{R}\right) + B \frac{R^2}{k^2}\left(1 - \cos \frac{ks}{R}\right).$$

Ici, de nouveau, la constante d'intégration a été choisie de la condition d'égalité à zéro des déplacements à l'origine des coordonnées. Comme pour $s = 2\pi R$, les grandeurs ϑ_x et y s'annulent, nous obtenons deux équations

$$A(1 - \cos 2\pi k) + B \sin 2\pi k = 0,$$

$$A\left(2\pi R - \frac{R}{k} \sin 2\pi k\right) + B \frac{R}{k}(1 - \cos 2\pi k) = 0.$$

Annulons le déterminant et trouvons la plus petite racine $2\pi k = 2\pi$. Par conséquent, $k = 1$ et on aura alors

$$\frac{EJ_y}{\sqrt{GJ_t EJ_x}} = 1.$$

Or,

$$EJ_x = E\frac{b^3h}{12}, \quad EJ_y = E\frac{bh^3}{12}, \quad GJ_t = \frac{E}{2(1+\mu)}\beta h^3 b,$$

de là il découle que

$$\frac{b^2}{h^2} = \frac{1+\mu}{6\beta}. \qquad \text{(A)}$$

Posons $\mu = 0{,}3$. Pour ce qui est du coefficient de rigidité β à la torsion, il dépend de façon complexe du rapport b/h.

Les données des tables sur β qu'on trouve dans le cours de résistance des matériaux ne sont pas suffisantes pour résoudre cette équation transcendante. C'est pourquoi nous allons nous servir de la relation suivante

$$\beta = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{192}{\pi^5}\frac{h}{b} \sum_{i=1,\,3,\,\ldots} \frac{1}{i^5} \operatorname{th} \frac{i\pi b}{2h}\right].$$

Après avoir essayé quelques chiffres, trouvons la solution de l'équation (A):

$$\frac{b}{h} = 1{,}16.$$

La forme rectiligne d'équilibre est stable pour

$$b > 1{,}16\,h.$$

155. La probabilité de l'incurvation de la barre dans l'un ou l'autre sens est déterminée par son incurvation initiale, les inhomogénéités, dues au hasard, dans le matériau ainsi que par les inclinaisons de la ligne d'action de la force P par rapport à l'axe de la barre.

Le degré d'influence des facteurs accidentels dépend de la rigidité de la barre. La plus probable est, évidemment, la flexion dans le plan correspondant à la rigidité minimum, c'est-à-dire dans le cas présent, par rapport à l'axe z (fig. 422). Il reste à vérifier si la rigidité en flexion ne change pas lorsque le moment change de signe. Dans le cas où la rigidité reste inchangée, l'incurvation à gauche ou à droite sera d'une égale probabilité. Si la rigidité s'avère différente, la plus probable sera une flexion dans le sens de la rigidité minimale.

Supposons que la courbe de compression du matériau est donnée (fig. 423). La contrainte σ créée dans les sections transversales de la barre dépasse par hypothèse la limite d'écoulement (point A sur le diagramme). Lors de la flexion de la barre, les couches situées du côté concave subissent une fatigue supplémentaire, et les contraintes y croissent en fonction de ε selon la droite *1*. Du côté convexe, c'est un déchargement qui se produit, et le mode de dépendance entre σ et ε est représenté par la droite *2*. Désignons par D la tangente de l'angle d'inclinaison de la droite *1* et par E, celle de la droite *2*,

E étant le module d'élasticité. Comme résultat, l'épure des contraintes de flexion supplémentaires épousera la forme d'une ligne brisée

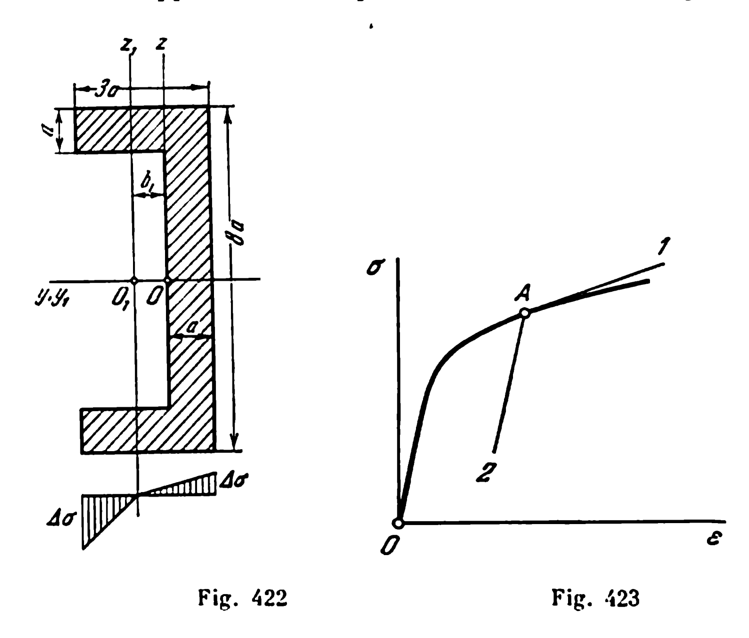


Fig. 422 Fig. 423

(fig. 422). L'emplacement de la fibre neutre z_1 se déterminera de la condition selon laquelle

$$\int_F \Delta\sigma\, dF = 0, \tag{1}$$

puisque dans la section la force normale ne varie pas et reste constamment égale à P.

Si la barre s'incurve à gauche, l'axe z_1 se déplace également à gauche par rapport à l'axe central z. Si la barre s'incurve à droite, l'axe neutre se déplacera à droite.

Examinons le premier cas. L'axe z_1 est déplacé à gauche. Du côté convexe de la barre

$$\Delta\sigma = E\frac{y_1}{\rho} \quad (y_1 \geqslant 0),$$

tandis que du côté concave,

$$\Delta\sigma = D\frac{y_1}{\rho} \quad (y_1 \leqslant 0).$$

En vertu de l'expression (1), nous avons

$$E \int_{\text{gauche}} y_1\, dF = D \int_{\text{droite}} y_1\, dF,$$

ici la première intégrale s'étend sur un domaine situé à gauche par rapport à l'axe z_1, tandis que la seconde, sur un domaine situé à droite du même axe (fig. 422). Après avoir calculé les moments statiques des zones indiquées par rapport à l'axe z_1, nous trouverons

$$b_1=\frac{2a}{1-d}\left(1+2d-\sqrt{6d+3d^2}\right),$$

avec $d = D/E$.

Pour une incurvation de la barre à droite, l'axe z_1 se déplace à droite, d'une valeur

$$b_2=\frac{a}{2(1-d)}\left(2+d-\sqrt{12d-3d^2}\right).$$

Déterminons maintenant le moment créé par les contraintes $\Delta\sigma$ par rapport à l'axe transversal z_1. Remarquons que l'axe peut être choisi de façon arbitraire du fait que la force normale due aux contraintes $\Delta\sigma$ pour les b_1 et b_2 trouvés est nulle.

Pour une incurvation à gauche

$$M_1=\frac{1}{\rho_1}\left[E\int\limits_{\text{gauche}} y_1^2\,dF+D\int\limits_{\text{droite}} y_1^2\,dF\right].$$

On peut écrire cette expression dans la forme suivante

$$M_1=\frac{EJ_1}{\rho_1},$$

avec

$$J_1=\frac{2}{3}a(2a-b_1)^3+\frac{d}{3}\left[8a(a+b_1)^3-6ab_1^3\right].$$

Eliminant b_1, nous obtiendrons

$$J_1=\frac{8a^4d}{(1-d)^2}\left[7+22d+7d^2-4(2+d)\sqrt{6d+3d^2}\right].$$

Lors d'une incurvation de la barre à droite, nous obtenons de façon analogue

$$J_2=\frac{2a^4d}{(1-d)^2}\left[10-2d+d^2-(4-d)\sqrt{12d-3d^2}\right].$$

Dans l'intervalle de variation de d de zéro à l'unité, nous avons

$$J_2\leqslant J_1.$$

Par conséquent, la probabilité d'incurvation est plus grande à droite qu'à gauche. En flambement, la forme la plus probable d'incurvation de la barre est celle où le côté ouvert du profil se retrouvera du côté concave de la barre.

156. La perte de stabilité est possible pour des ressorts de traction dotés d'un enroulement avec serrage.

Chez des ressorts de ce genre, les spires se trouvent compactement comprimées les unes contre les autres. Avec l'augmentation de la force de traction, la pression de contact entre les spires diminue.

L'allongement du ressort ne peut commencer qu'à une force dépassant la force de précompression P_0 (fig. 424).

La perte de stabilité s'accompagne d'un gauchissement et d'une flexion des spires (fig. 425). Tout se fait comme si chaque spire, sans

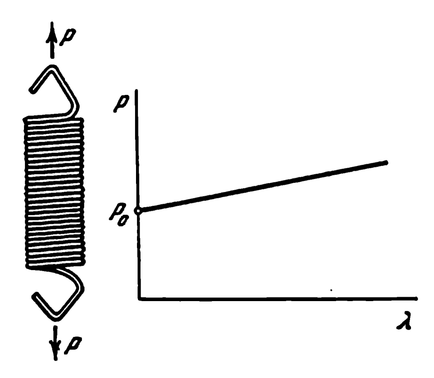


Fig. 424

attendre le moment où elle pourra se détacher de sa voisine, glisse sur la surface de contact en fléchissant dans son propre plan. Le travail effectué par la force P sur le déplacement axial ainsi créé se transforme en énergie de flexion des spires.

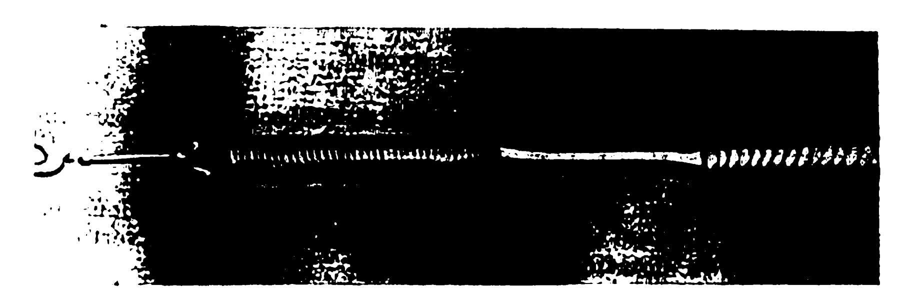


Fig. 425

Le schéma de calcul pour la détermination des forces critiques est montré sur la fig. 426. En vertu de la formule (3) (voir solution du problème 54, p. 133)

$$\Delta\vartheta = \frac{Q}{C_{cis}}.$$

Or, $Q = P\Delta\vartheta$. Eliminant Q, nous obtenons

$$P_{cr} = C_{cis}.$$

De la formule (4) du même problème, nous obtenons

$$P_{cr} = \frac{Ed^4 l}{8D^3 n}.$$

Comme dans le cas présent $l/n = d$, on aura

$$P_{cr} = \frac{Ed^5}{8D^3}.$$

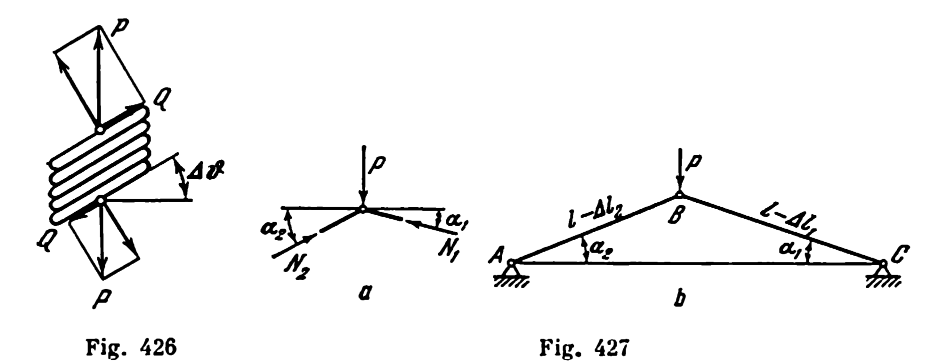


Fig. 426

Fig. 427

157. Examinons le système dans une position inclinée par rapport à la verticale.

Les équations d'équilibre pour le nœud (fig. 427, *a*) seront les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} P = N_1 \sin\alpha_1 + N_2 \sin\alpha_2, \\ N_1 \cos\alpha_1 = N_2 \cos\alpha_2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Du triangle *ABC* (fig. 427, *b*) nous avons

$$\left.\begin{aligned} (l - \Delta l_1)\cos\alpha_1 + (l - \Delta l_2)\cos\alpha_2 = 2l\cos\alpha_0, \\ (l - \Delta l_1)\sin\alpha_1 = (l - \Delta l_2)\sin\alpha_2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nous prendrons en considération les petites perturbations par rapport à la verticale et les grandes perturbations selon la verticale. Introduisons la notation suivante :

$$\alpha_2 = \alpha + \beta, \quad \alpha_1 = \alpha - \beta,$$

où l'angle α caractérise un déplacement du nœud en bas, tandis que β, un déplacement selon l'horizontale. Par analogie,

$$N_1 = N - \Delta N, \quad N_2 = N + \Delta N.$$

Désignons par c la rigidité des barres à la compression

$$\Delta l_1 = \frac{N - \Delta N}{c}, \quad \Delta l_2 = \frac{N + \Delta N}{c}.$$

Mettons ensuite α_1, α_2, N_1, N_2, Δl_1 et Δl_2 dans les équations (1) et (2) et linéarisons ces dernières en négligeant les petits produits $\beta\Delta N$. Ne sont retenues que les premières puissances de ces grandeurs.

En définitive, à la place de (1) et de (2), nous obtiendrons

$$P = 2N \sin \alpha,$$

$$N\beta \sin \alpha - \Delta N \cos \alpha = 0,$$

$$\left(l - \frac{N}{c}\right) \cos \alpha = l \cos \alpha_0,$$

$$\left(l - \frac{N}{c}\right) \beta \cos \alpha - \frac{\Delta N}{c} \sin \alpha = 0.$$

La première et la troisième de ces équations donnent la possibilité de déterminer l'angle α en fonction de la force P pour une forme symétrique d'équilibre,

$$\frac{P}{2cl} = \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}\right). \tag{3}$$

La deuxième et la quatrième équation sont homogènes par rapport aux grandeurs inconnues β et ΔN qui caractérisent une déviation latérale. Annulons le déterminant de ce système

$$\begin{vmatrix} N \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \left(l - \frac{N}{c}\right) \cos \alpha & -\frac{1}{c} \sin \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\frac{N}{c} - l \cos^2 \alpha = 0.$$

Remplaçant N par P, nous obtiendrons

$$\frac{P}{2cl} - \sin \alpha \cos^2 \alpha = 0,$$

ou, en vertu de l'équation (3),

$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha - \cos^3 \alpha.$$

La fig. 428 montre le graphique exprimant la dépendance entre $\cos \alpha$ et $\cos \alpha_0$. Ce graphique doit être interprété de la manière

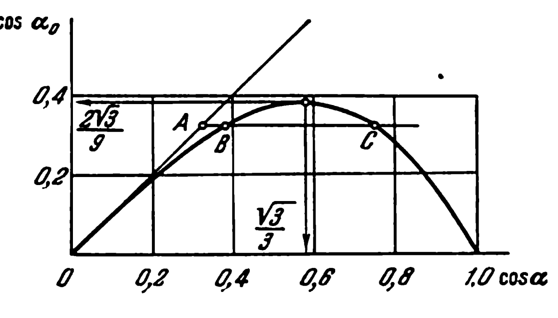


Fig. 428

suivante : l'angle α_0 est donné. Le système n'est pas sollicité. $\alpha = \alpha_0$ (point A sur la fig. 428). Au fur et à mesure que la sollicitation augmente, l'angle α diminue tandis que $\cos \alpha$ augmente. Le point B

caractérise le passage à une forme non symétrique. La valeur de la force correspondante P peut également être déterminée à partir de l'équation (3). Lorsque l'angle α aura suffisamment diminué, la forme symétrique d'équilibre redeviendra stable (point C sur le graphique). L'apparition de formes non symétriques n'est possible que pour $\cos\alpha_0 < 2\sqrt{3}/9$ ou pour $\alpha_0 > 67°25'$.

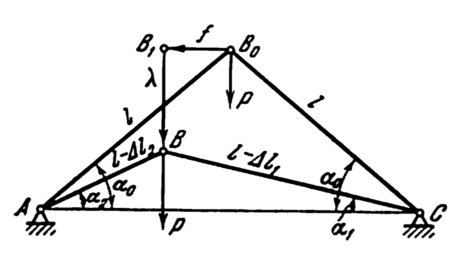


Fig. 429

Le comportement du système dans l'état postcritique peut être étudié à condition de renoncer à supposer que l'angle β est petit. Au reste, il est plus commode de résoudre le problème par la méthode énergétique. Si l'on introduit les déplacements λ et f (fig. 429), il sera facile d'obtenir des quadrilatères CBB_1B_0 et ABB_1B_0 les relations suivantes:

$$l\cos\alpha_0 + f = (l - \Delta l_1)\cos\alpha_1,$$
$$l\sin\alpha_0 - \lambda = (l - \Delta l_1)\sin\alpha_1,$$
$$l\cos\alpha_0 - f = (l - \Delta l_2)\cos\alpha_2,$$
$$l\sin\alpha_0 - \lambda = (l - \Delta l_2)\sin\alpha_2.$$

Eliminant α_1 et α_2, nous obtiendrons

$$\Delta l_1 = l - \sqrt{(l\sin\alpha_0 - \lambda)^2 + (l\cos\alpha_0 + f)^2},$$
$$\Delta l_2 = l - \sqrt{(l\sin\alpha_0 - \lambda)^2 + (l\cos\alpha_0 - f)^2}.$$

L'énergie potentielle totale du système sera

$$U = \frac{1}{2}c(\Delta l_1)^2 + \frac{1}{2}c(\Delta l_2)^2 - P\lambda.$$

Les premières dérivées de U par rapport à λ et f dans la position d'équilibre étant nulles, c'est d'après le signe des dérivées secondes que l'on détermine si la forme d'équilibre est stable ou instable.

Nous laissons au lecteur la possibilité de faire lui-même cette analyse.

158. Représentons-nous que les billes BB se soient retournées d'un petit angle φ par rapport à l'axe OA (fig. 430). Alors, les forces d'inertie des billes $m\omega^2 l$ ne seront plus parallèles à l'axe OA et formeront un couple dont le moment est

$$M = m\omega^2 l\alpha 2\alpha$$

et qui fait tordre la barre OA. Mais comme $\alpha = \varphi a/l$, on a aussi

$$M = 2m\omega^2 a^2\varphi.$$

D'autre part, pour une barre tordue, on a

$$M = \frac{GJ_p}{l}\varphi,$$

GJ_p étant la rigidité de la barre ; ainsi,

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{2mla^2}}.$$

C'est bien la vitesse angulaire critique pour le système donné. Pour une vitesse dépassant celle examinée, la barre OA sera soumise à la torsion.

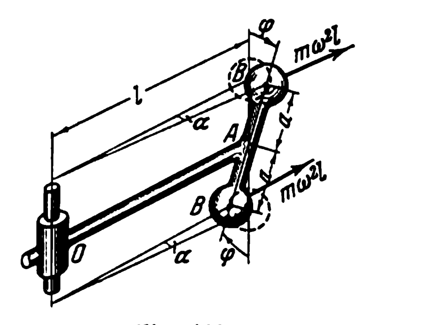


Fig. 430

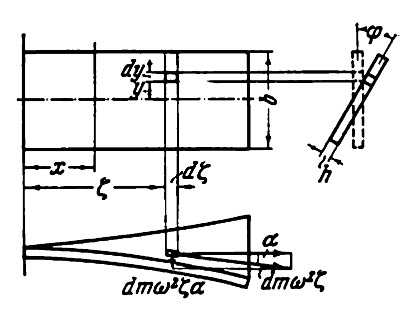


Fig. 431

159. Représentons-nous qu'une certaine section située à une distance ζ de l'axe se soit tournée, par suite de la torsion de la barre, d'un angle φ (fig. 431). Prélevons de la barre un élément $d\zeta\, dy\, h$ situé à une distance y de l'axe de la barre. Quand la section se tourne d'un angle φ, la force élémentaire d'inertie $dm\,\omega^2\zeta$ donne une composante transversale $dm\,\omega^2\zeta\alpha$.

Le moment de torsion élémentaire créé par cette force sera :

$$dM = dm\,\omega^2\zeta\alpha y.$$

Or,

$$dm = \frac{\gamma}{g} h\, d\zeta\, dy, \quad \alpha = \varphi\frac{y}{\zeta},$$

γ étant le poids spécifique du matériau dont est faite la barre. Alors, le moment de torsion dans la section x se déterminera comme

$$M = \int_{-b/2}^{+b/2}\int_{0}^{l} \frac{\gamma}{g} h\omega^2\varphi y^2\, dy\, d\zeta = \frac{\gamma}{g}\frac{b^3h}{12}\omega^2\int_{0}^{l}\varphi\, d\zeta.$$

La force normale dans la même section se déterminera par l'intégration de l'expression

$$\omega^2\zeta\, dm = \frac{\gamma}{g}\omega^2 h\zeta\, d\zeta\, dy,$$

ce qui donne

$$N=\int_{-b/2}^{+b/2}\int_{x}^{l}\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 h\zeta\,d\zeta\,dy=\frac{\gamma}{g}\,\frac{\omega^2 bh}{2}\,(l^2-x^2).$$

Des conditions de torsion de la barre, nous avons

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M_t}{C},$$

C étant la rigidité en torsion. Dans le cas présent, cette dernière grandeur dépend de la force N (voir problème 29):

$$C=\frac{1}{3}\,bh^3G+\frac{Nb^2}{12},$$

$$C=\frac{1}{2}\,bh^3G+\frac{\gamma}{g}\,\frac{b^3h}{24}\,\omega^2\,(l^2-x^2).$$

Dans le problème précédent, les barres OA étaient rondes et leur rigidité ne dépendait pas de la force de traction. Cette fois-ci, nous obtenons

$$\frac{d\varphi}{dx}\,C=\frac{\gamma}{g}\,\frac{b^3h}{12}\,\omega^2\int_{x}^{l}\varphi\,d\zeta.$$

Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à x:

$$\frac{d}{dx}\left(C\,\frac{d\varphi}{dx}\right)=-\frac{\gamma}{g}\,\frac{b^3h}{12}\,\omega^2\varphi.$$

Or, de l'expression donnant C, il découle que

$$-\frac{\gamma}{g}\,\frac{b^3h}{12}\,\omega^2=\frac{1}{x}\,\frac{dC}{dx},$$

c'est pourquoi

$$x\,\frac{d}{dx}\left(C\,\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{dC}{dx}\,\varphi.$$

Indépendamment de la forme de la fonction C, la solution de cette équation sera

$$\varphi=x\left[A\int\frac{dx}{x^2C}+B\right],$$

A et B étant des constantes arbitraires.

Calculons l'intégrale

$$\int\frac{dx}{x^2C}=\int\frac{dx}{\left[\frac{1}{3}\,bh^3G+\frac{\gamma}{g}\,\frac{b^3h}{24}\,\omega^2\,(l^2-x^2)\right]x^2}=\frac{1}{p}\left[-\frac{1}{x}+\frac{k}{2}\ln\frac{1+kx}{1-kx}\right],$$

dans laquelle on a fait les désignations suivantes:

$$p=\frac{1}{3}\,bh^3G+\frac{\gamma}{g}\,\frac{b^3h}{24}\,\omega^2l^2,$$

$$k^2=\frac{1}{p}\,\frac{\gamma}{g}\,\frac{b^3h}{24}\,\omega^2.$$

Ainsi,

$$\varphi = \frac{A}{p}\left(-1 + \frac{k}{2} x \ln \frac{1+kx}{1-kx}\right) + Bx.$$

Pour $x = 0$ $\varphi = 0$, d'où $A = 0$. Puis, pour $x = l$, nous avons $M_t = 0$ $(d\varphi/dx = 0)$, et alors $B = 0$.

Par conséquent, pour n'importe quelle vitesse angulaire ω, la barre reste droite. Si la rigidité en torsion ne dépendait pas de la force normale, il y aurait moyen d'indiquer une vitesse angulaire critique pour la barre.

160. Un disque mince, homogène, tournant autour d'un axe perpendiculaire à son plan, peut connaître une perte de stabilité. Mais pour des disques d'épaisseur ordinaire, la vitesse critique ω_{cr} se situe plus haut que celle pour laquelle survient la destruction. Si l'on prend un disque métallique très mince ou, mieux encore, un disque en caoutchouc, on peut expérimentalement obtenir la forme de perte de stabilité montrée sur la fig. 432.

Une telle forme d'équilibre peut avoir une explication suivante. Supposons que le disque soit équilibré d'une façon idéale, et, de plus, que son plan ait subi une déformation extérieure telle que son équilibre se soit rompu. Si le centre de gravité du disque s'est déplacé à droite, comme le montre la fig. 432, dans le voisinage de l'axe immobile apparaîtront, du côté gauche, des contraintes radiales de compression. C'est pourquoi cette zone du disque peut subir une incurvation, pour une vitesse angulaire suffisamment grande, et le déséquilibre augmentera davantage. Si, avec cela, le disque ne sera pas détruit, après la perte de stabilité, sa forme peut rappeler celle montrée sur la fig. 432.

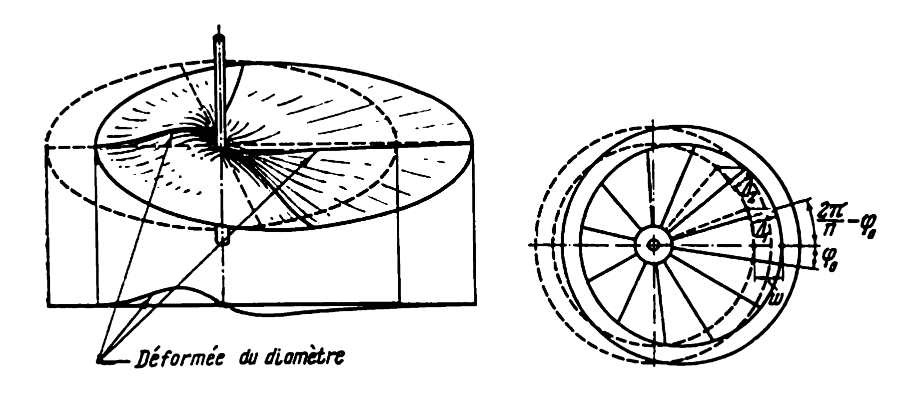


Fig. 432 Fig. 433

161. Déterminons la force P qu'il faut appliquer à l'anneau pour le faire dévier de son axe d'une certaine grandeur petite w (fig. 433).

On aura, évidemment,

$$P = \sum_{1}^{n} N_i \cos\left(i\frac{2\pi}{n} - \varphi_0\right),$$

où i est le numéro du rayon, N_i l'effort normal créé dans ses sections.
Si l'on désigne par Δ_i l'allongement du i-ième rayon, alors,

$$N_i = \frac{EF\Delta_i}{l}.$$

Or,

$$\Delta_i = w\cos\left(i\frac{2\pi}{n} - \varphi_0\right),$$

on a donc

$$P = w\frac{EF}{l}\sum_{1}^{n}\cos^2\left(i\frac{2\pi}{n} - \varphi_0\right).$$

On peut montrer que

$$\sum_{1}^{n}\cos^2\left(i\frac{2\pi}{n} - \varphi_0\right) = \frac{n}{2},$$

et, alors,

$$P = w\frac{EFn}{2l}.$$

Le nombre critique de tours s'obtient de la condition

$$P = m\omega_{cr}^2 w = w\frac{EFn}{2l},$$

d'où nous obtenons

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{EFn}{2ml}}.$$

162. Pour une certaine pression (dans la zone d'allongements notoires), la forme sphérique d'équilibre devient instable. Si pour une raison quelconque dans la paroi apparaît un amincissement local, celui-ci va continuer à se développer. L'épaisseur de la paroi devient uniforme et la sphère s'étire quelque peu (fig. 434, *a*). Ce phénomène qui offre des analogies avec le processus de la formation d'une gorge chez des éprouvettes en traction, peut également être constaté lors du gonflement de la vessie d'un ballon de volleyball. Un phénomène analogue s'observe également lors du gonflement de la chambre à air d'un vélo (fig. 434, *b*).

163. Si pour une raison extérieure quelconque l'éprouvette se trouve soumise à une contraction locale, elle recouvrera d'elle-même, l'effort de traction n'étant pas grand, sa forme cylindrique, à condition que soit éliminée la cause de cette contraction. Ainsi, jusqu'au

moment où l'effort de traction prenne une valeur déterminée, la forme cylindrique de l'éprouvette reste stable.

Pour un effort de traction suffisamment grand, toute contraction locale entraînera une telle augmentation des contraintes dans la

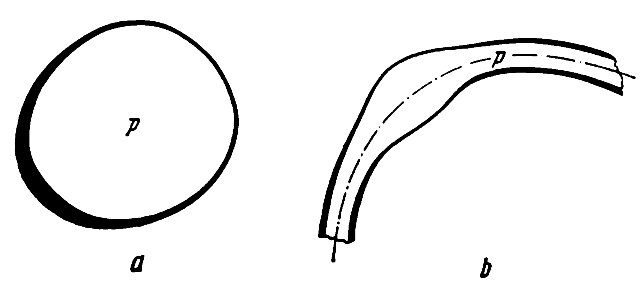


Fig. 434

zone de contraction que, même si les causes de cette contraction seront éliminées, la barre ne sera pas à même de recouvrer la forme cylindrique. La contraction se développera toujours avec une gorge à l'éprouvette. La forme cylindrique d'équilibre s'avère donc instable.

V. QUESTIONS ET PROBLÈMES DIVERS

164. La plus grande résistance limite à la traction appartient à certains types d'aciers spéciaux employés dans la fabrication des cylindres de haute pression ; elle atteint la valeur de

$$\sigma_{t.tr} = 245 \text{ kgf/mm}^2.$$

Un fil écroui mince en acier ou en tungstène présente des données encore plus élevées. Le premier a une résistance limite à la traction proche de 350 kgf/mm^2 ; le second, proche de 420 kgf/mm^2. La résistance limite à la compression atteint 450 kgf/mm^2 pour l'acier au carbone et 500 kgf/mm^2 pour le tungstène.

Le carboloy (carbide de tungstène cémenté de cobalt), métal de destination spéciale employé dans la technique de hautes pressions, accuse, selon des données publiées, $\sigma_{t.c} = 650\text{-}670$ kgf/mm^2. En traction ce matériau travaille, cependant, moins bien que l'acier.

Les cristaux filiformes des métaux et des pierres précieuses obtenues artificiellement et auxquels la technique d'un prochain avenir accordera une place considérable ont une résistance limite très élevée. Il importe, cependant, de mettre le lecteur en garde contre l'identification des notions « résistance d'une éprouvette » et « résistance d'une structure ».

C'est, effectivement, la résistance de l'éprouvette qui définit la valeur de la résistance limite. Mais pour ce qui est de la résistance d'une pièce fabriquée dans le même matériau, elle est déterminée, dans les conditions d'exploitation, non seulement par la résistance limite, mais par d'autres caractéristiques encore dont, notamment, la plus importante est l'allongement de rupture ainsi que d'autres indices, qui ne se prêtent d'ailleurs pas à une détermination univoque, tels que, par exemple, la sensibilité à des contraintes locales, la résilience au choc, etc. C'est pourquoi, une pièce fabriquée dans un matériau ayant une résistance limite plus élevée, s'avère bien souvent, dans les conditions d'exploitation, moins résistante qu'une pièce identique fabriquée dans un autre matériau avec une résistance limite moins grande.

La résistance limite de certains aciers peut, au moyen d'un traitement thermique accompagné d'un écrouissage intermédiaire, être élevée jusqu'à 280-300 kgf/mm². Cependant, cet indice à lui seul ne suffit pas pour faire une appréciation correcte du résultat obtenu.

165. Le bois en traction le long des fibres. Par exemple, pour un sapin sec, la résistance limite à la compression $\sigma_{t.c} \approx 5{,}50$ kgf/mm², alors qu'à la traction $\sigma_{t.\,tr} \approx 7{,}20$ kgf/mm²; pour un hêtre,

$$\sigma_{t.\,c} \approx 6{,}70 \text{ kgf/mm}^2, \quad \sigma_{t.\,tr} \approx 8{,}20 \text{ kgf/mm}^2.$$

Cette propriété du bois est la conséquence de son anisotropie. Dans le bois, des couches rigides se succèdent avec des couches souples. Lors d'une compression longitudinale, ce sont les couches rigides qui supportent le gros de la charge. Avec des efforts suffisamment grands, dans ces couches commence un voilement local qui conduit à une destruction rapide de l'éprouvette. Le textolite possède une propriété analogue.

166. Il est largement connu que le module d'élasticité de l'acier est de $2 \cdot 10^4$ kgf/mm², mais peu sont ceux qui connaissent les matériaux dont le module d'élasticité dépasse cette valeur. Donnons les caractéristiques suivantes des métaux dans l'ordre de grandeur de leurs modules d'élasticité:

	kgf/mm²
Cobalt et nickel	21 100
Rhodium	29 800
Béryllium	29 900
Tungstène et molybdène	35 200
Carboloy	70 000

167. Chez certains types de caoutchouc, le module d'élasticité atteint 0,04-0,05 kgf/mm². Parmi les métaux, le module d'élasticité le plus petit appartient au plomb (E = 1830 kgf/mm²) et au calcium (E = 2110 kgf/mm²).

168. Pour répondre à cette question il faut savoir combien sont grandes les déformations que l'on a en vue. D'ordinaire, il est convenu de dire que le caoutchouc n'obéit pas à la loi de Hooke. Avec cela, cependant, on ne dit pas s'il s'agit de grandes déformations de l'ordre de 100 % et plus.

Pour des déformations ne dépassant pas 10-20 %, tous les types de caoutchouc peuvent, en règle générale, être considérés, avec une précision librement suffisante pour des buts pratiques, comme obéissant à la loi de Hooke. Aucun autre matériau n'accuse de déformations aussi grandes dans les limites de proportionnalité.

169. Nous sommes habitués à croire qu'en traction simple le rapport de la contraction transversale à l'allongement longitudinal, dit coefficient de Poisson, doit être plus petit que 0,5. Cette condition, cependant, n'est valable que pour un matériau isotrope et on n'a donc aucune raison de croire qu'elle doit être observée pour des matériaux anisotropes tel le bois, notamment.

Ainsi, s'il n'y a pas de doutes dans la précision des mesurages et le principe de réalisation des expériences, le rapport 0,6 obtenu pour le bois peut être adopté sans réserves.

170. Le fait est que, en traction, l'allongement du câble se produit non seulement par suite de l'allongement des fils, mais encore suite à leur flexion partielle et torsion. Le module d'élasticité réduit du câble en traction ne reste pas constant, c'est-à-dire la courbe de traction du câble ne sera pas linéaire même si les fils connaissent des déformations élastiques. Dans la première phase de traction, les fils se tassent et les interstices entre eux diminuent progressivement. Si l'on augmente la traction, les déformations locales qui apparaissent dans les zones de contact entre les fils, vont acquérir un rôle considérable.

171. Les fibres, dont est fait le fil, sont plus petites que le fil même. C'est pourquoi, la résistance du fil dépend non seulement de la résistance des fibres mêmes, mais aussi de leur adhérence mutuelle. Quant à cette dernière, elle est déterminée par les forces de frottement agissant entre les fibres. Pour un fil tordu, chaque fibre se marie avec les voisines, en est comprimée, et les forces d'adhérence des fibres se trouvent beaucoup plus grandes que chez un fil non tordu.

Les valeurs des forces d'adhérence dépendent largement de la longueur des fibres. C'est la raison pour laquelle le coton longue-soie, par exemple, est plus précieux que le coton courte-soie.

Détail curieux: les fils à fibre synthétique se montrent moins résistants à la rupture quand ils sont tordus que s'ils ne le sont pas. La fibre synthétique a une grande longueur égale à la longueur du fil. C'est pourquoi, les fibres n'ont pas besoin d'être rattachées et, dans ce cas, le tors ne fait que susciter des contraintes supplémentaires provoquant une rupture plus rapide.

Mais en dépit de cela, les fils à fibre synthétique sont tout de même tordus ou tressés. Cela est indispensable à faire pour éviter que, lors du maniement, les fils ne s'effilent et ne se rompent par fibres détachées.

172. L'étudiant a confondu les notions de résistance et de rigidité.

Quand on parle d'un matériau de haute qualité, on a en vue ses indices de résistance. L'acier allié a des indices de résistance plus élevés, mais son module d'élasticité E est presque le même que chez tous les autres aciers, c'est-à-dire à peu près $2 \cdot 10^4$ kgf/mm^2. C'est pourquoi, le fait d'employer un acier allié, dans le cas présent, ne donne rien.

173. D'après l'hypothèse, les déplacements dans la poutre sont proportionnels aux charges actives. Par conséquent, nous pouvons employer pour le système en question la loi de la réciprocité des déplacements.

Le déplacement dans une section x peut être déterminé en plaçant un indicateur en dessous du point A et en appliquant sur la

poutre une charge dans la section x (fig. 435). Déplaçant la charge, mesurons δ_x au point A pour différentes valeurs de x. La courbe de dépendance obtenue $\delta_x = f(x)$ représente la déformée de la poutre.

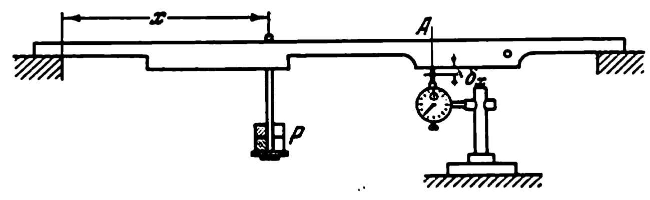


Fig. 435

Si le poids P est à tel point grand que son déplacement cause des difficultés, on peut le réduire puis, conformément à l'hypothèse, en augmentant proportionnellement les flèches mesurées, obtenir la déformée pour une valeur donnée de la force P.

174. Examinons deux états d'un corps élastique quelconque (pas nécessairement un cylindre) reposant sur une assise rigide.

Premier état : le corps se trouve sous l'action de son propre poids. Second état : le corps se trouve sous l'action d'une certaine pression p uniformément répartie sur sa surface. Selon le théorème de la réciprocité, le travail accompli par le premier système des forces sur les déplacements suscités par le second système est égal au travail accompli par le second système des forces sur les déplacements du premier système.

Pour le premier des états indiqués du corps élastique, le travail accompli par les forces du poids sur les déplacements suscités par l'action de la pression est égal à

$$\int_V \gamma \, dV \, w_p,$$

où γ est le poids spécifique, $\gamma \, dV$, le poids d'un volume élémentaire, w_p, le déplacement vertical d'un certain point du corps élastique se trouvant sous l'action d'une pression p agissant de tous côtés. Ce déplacement est mesuré naturellement par rapport à l'assise rigide. Or, sous une pression agissant de tous côtés, les allongements élastiques dans tous les points d'un corps seront constants et égaux à

$$\varepsilon = -\frac{p}{E}(1-2\mu).$$

Par conséquent, le déplacement vertical w_p est proportionnel à la distance de l'assise rigide. Alors,

$$\int_V \gamma w_p \, dV = \gamma \int_V w_p \, dV = \gamma V w_p^*,$$

w_p^* étant le déplacement du centre de gravité du corps élastique.

Si le centre de gravité du corps élastique se trouve à une distance H de l'assise, on aura

$$w_p^* = H \frac{p}{E} (1-2\mu).$$

Ainsi,

$$\int_V \gamma w_p \, dV = \gamma V \frac{Hp}{E} (1-2\mu).$$

D'autre part, selon le théorème de la réciprocité, cette valeur est égale au travail de la pression p sur la variation ΔV du volume cherché, variation due à l'action des forces du poids propre, c'est-à-dire

$$\gamma V \frac{Hp}{E} (1-2\mu) = p \, \Delta V,$$

de là, nous obtenons

$$\Delta V = \gamma V H \frac{1-2\mu}{E}.$$

Si on tourne le corps de telle sorte que son centre de gravité se retrouve à une autre hauteur, il y aura une variation correspondante de ΔV.

Naturellement, la solution obtenue est valable pour n'importe quel corps, indépendamment de sa forme. Pour le cylindre donné, avec le passage de la position I à la position II (fig. 156), le volume augmentera, évidemment, de

$$P \left(\frac{H}{2} - R \right) \frac{1-2\mu}{E}.$$

175. Le problème se résout exactement de la même façon que le précédent:

$$p \, \Delta V_P = P \Delta (AB)_p,$$

où ΔV_P est la variation cherchée du volume provoquée par les forces P tandis que $\Delta (AB)_p$, la variation de la distance entre les points A et B, due à la pression p. De toute évidence,

$$\Delta (AB)_p = -p \frac{1-2\mu}{E} (AB),$$

AB étant la distance entre les points d'application des forces. Par conséquent, la variation cherchée du volume sera

$$\Delta V_P = -P \cdot AB \cdot \frac{1-2\mu}{E}.$$

176. L'explication est erronée. Conformément aux considérations faites, indépendamment de la forme de sa section transversale le tube devra toujours diminuer de courbure, se redresser, sous l'action d'une pression interne. Cependant, l'expérience montre qu'un

tube de section circulaire ne réagit aucunement à la pression interne tandis qu'un tube dont la section a une disposition inversée du grand et du petit axes, au lieu de diminuer, augmente de courbure sous l'action de la pression interne.

L'auteur de l'explication présentée plus haut n'a pas tenu compte de ce que, outre les forces P_1 et P_2 agissant sur les surfaces S_1 et S_2, il y a encore une autre force agissant sur le fond du tube. Cette force crée un moment exactement égal à la différence entre les moments des forces P_1 et P_2 si bien que le moment fléchissant dans n'importe quelle section du tube est égal à zéro. Avec cela, il n'y a aucune nécessité de calculer les valeurs de ces forces pour vérifier ce qu'on

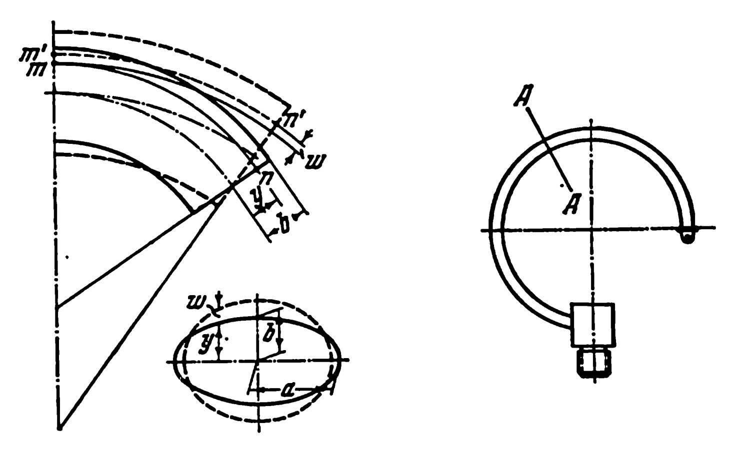


Fig. 436

vient de dire. La surface du tube, à droite d'une section arbitrairement choisie AA (fig. 436), est une surface fermée et, dans cette section, la pression crée uniquement une force normale égale au produit de la pression par l'aire de la section « nette ».

Pour une forme quelconque du tube, les forces de pression ne créent pas du tout le moment fléchissant. L'exploitation du tube s'accompagnera nécessairement d'une déformation du contour de la section transversale. Quelle que soit la forme non circulaire de la section du tube, le contour de cette section tendra, sous l'action d'une pression interne excédentaire, à épouser la forme d'une circonférence. Avec cela, le petit axe de la section va quelque peu augmenter tandis que le grand axe va diminuer et tout le contour adoptera une forme rappelant à peu près celle qui est montrée en pointillé sur la fig. 436. Avec cela, à chaque fibre longitudinale du tube sera communiqué un certain déplacement dans une direction parallèle au petit axe de la section. Un tel déplacement pour la fibre mn est désigné, sur la fig. 436, par w.

Lorsque la fibre mn sera déplacée d'une valeur w, elle passera à l'arc du grand rayon et des contraintes de traction apparaîtront

en elle. Dans les fibres situées au-dessous de l'axe neutre apparaîtront des contraintes de compression. Avec cela, le tube va se redresser.

A la lumière de ce qui vient d'être dit, on comprend clairement pourquoi un tube de section circulaire ne réagit pas à la pression interne. Dans le cas d'une section circulaire, le contour de la section ne fait que s'étirer et w devient négligeable. C'est pourquoi, la variation de la courbure d'un tube de section circulaire sera assez petite et ne peut pas être décelée dans le cadre des expériences habituelles.

Si le grand axe de la section est situé dans un plan de symétrie du tube, w aura un autre signe et, sous une pression interne, la courbure du tube va non pas diminuer, mais augmenter.

177. Dans le cas général, on a pour un contre-plaqué $f_1/f_2 \neq E_{2p}/E_{1p}$ car la rigidité en flexion d'un contre-plaqué dépend non

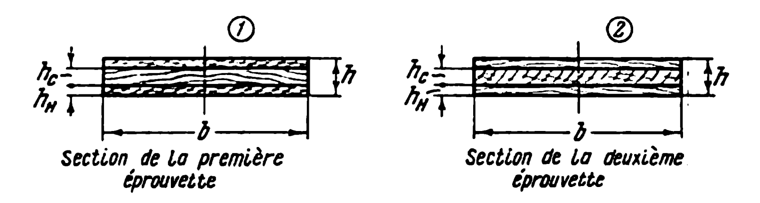


Fig. 437

seulement de l'épaisseur et de l'orientation des couches, mais encore de leur distance par rapport au plan médian.

En guise d'exemple très simple, examinons un contre-plaqué à trois couches (fig. 437). Désignons : la hauteur des couches externes par h_e ; l'épaisseur de la couche médiane par h_m. Les modules d'élasticité du bois, en travers et le long des fibres, sont respectivement égaux à E' et E''.

Calculons maintenant E_{1p} et E_{2p}. Pour le premier échantillon, nous aurons pour la traction par une force P

$$\sigma' b h_m + 2\sigma'' b h_e = P,$$

$$\varepsilon (E' b h_m + 2E'' b h_e) = P.$$

Or, comme $\varepsilon E_{1p} = P/bh$, le module de la première lame sera

$$E_{1p} = \frac{E' h_m + 2E'' h_e}{h}. \tag{1}$$

En intervertissant E' et E'' nous obtiendrons le module de la deuxième lame :

$$E_{2p} = \frac{E'' h_m + 2E' h_e}{h}. \tag{2}$$

Trouvons maintenant les modules d'élasticité réduits en flexion, E_{1fl} et E_{2fl}. Pour le premier échantillon en flexion par un moment M

nous aurons

$$2b\int_0^{h_m/2}\sigma' z\,dz+2b\int_{\frac{h_m}{2}}^{h_m/2+h_e}\sigma'' z\,dz=M,$$

z étant une distance courante comptée à partir de l'axe neutre,

$$\sigma'=E'\frac{z}{\rho};\quad \sigma''=E''\frac{z}{\rho}.$$

C'est pourquoi,

$$2b\frac{E'}{\rho}\int_0^{h_m/2}z^2\,dz+2b\frac{E''}{\rho}\int_{\frac{h_m}{2}}^{h_m/2+h_e}z^2\,dz=M,$$

ou, après intégration,

$$\frac{2}{3}\frac{b}{\rho}\left\{E'\frac{h_m^3}{8}+E''\left[\left(\frac{h_m}{2}+h_e\right)^3-\left(\frac{h_m}{2}\right)^3\right]\right\}=M.$$

Or, comme on sait,

$$E_{1\,fl}\cdot\frac{bh^3}{12}\frac{1}{\rho}=M,$$

d'où

$$E_{1\,fl}=(E'-E'')\left(\frac{h_m}{h}\right)^3+E''. \tag{3}$$

En intervertissant E' et E'', trouvons

$$E_{2\,fl}=(E''-E')\left(\frac{h_m}{h}\right)^3+E'. \tag{4}$$

Des expressions obtenues (1), (2), (3) et (4), on voit que dans le cas général

$$\frac{E_{1p}}{E_{2p}}\neq\frac{E_{1\,fl}}{E_{2\,fl}}.$$

Par exemple, si on pose $h_m=h/2$ et $h_e=h/4$, on aura

$$\frac{E_{1p}}{E_{2p}}=1,\ \frac{E_{1\,fl}}{E_{2\,fl}}=\frac{E'+7E''}{7E'+E''}.$$

178. Dans le problème proposé, tous les calculs sont faits d'une manière correcte et il n'y a pas de faute comme telle. Le résultat obtenu est dû au fait que pour résoudre le problème on a supposé qu'il n'y avait ni efforts tranchants ni moments fléchissants dans les sections de l'enveloppe.

Si l'on tient compte de ces efforts, les déplacements qu'on obtiendra seront finis. On peut avoir aussi une solution valable en partant de la théorie de membrane à la seule condition de tenir

compte d'une variation des efforts internes due à la modification de la forme de l'enveloppe au cours du chargement.

En résumé, on peut dire que lors de la détermination des contraintes, le fait de négliger la rigidité en flexion n'entraîne pas des erreurs sensibles dans la solution. Mais lorsqu'on a à évaluer les déplacements, une telle façon de procéder n'est pas toujours permise.

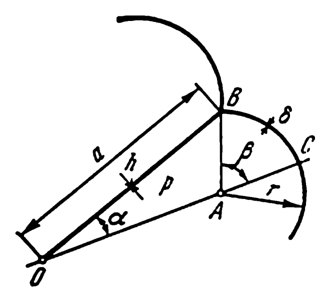


Fig. 438

179. Examinons une section d'un cylindre profilé (fig. 438). Soit p la pression interne et $[\sigma]$, la contrainte admissible.

L'épaisseur de la partie cylindrique de la section se détermine d'après la contrainte admissible et est donnée par la formule suivante:

$$\delta = \frac{pr}{[\sigma]}.$$

La paroi interne de soutien est soumise à la traction et se trouve sous l'action des forces qui lui sont transmises du côté des deux cylindres circulaires avoisinants. A une unité de hauteur du cylindre revient une force pr. La force de traction dans la paroi sera de

$$2pr \sin(\beta - \alpha).$$

La contrainte admissible pour la paroi est supposée être la même que pour le cylindre circulaire. Aussi, l'épaisseur de la paroi sera-t-elle

$$h = \frac{2pr \sin(\beta - \alpha)}{[\sigma]}.$$

Trouvons maintenant le poids de la structure par unité de longueur du cylindre profilé

$$P = \gamma n (2\beta r\delta + ah),$$

où γ est le poids spécifique du matériau, n, nombre de sections.

Après substitution de δ et h, nous obtiendrons

$$P = 2\gamma n \frac{pr}{[\sigma]} [\beta r + a \sin(\beta - \alpha)]. \tag{1}$$

Trouvons le volume de la cavité interne par unité de hauteur. Le volume du secteur ABC est égal à $\frac{1}{2}\beta r^2$, tandis que pour le triangle OAB nous avons $\frac{1}{2} ar \sin(\beta - \alpha)$, c'est pourquoi,

$$V = 2n\left[\frac{1}{2}\beta r^2 + \frac{1}{2} ar \sin(\beta - \alpha)\right],$$

ou

$$V = nr[\beta r + a \sin(\beta - \alpha)]$$

Revenant à l'expression (1), nous obtiendrons

$$P=2\frac{\gamma p}{[\sigma]}V.$$

Cela signifie que pour un volume donné d'un gaz comprimé, le poids de la structure ne peut subir aucune variation si l'on fait changer les grandeurs α, β, a et n. Un cylindre ordinaire lisse a, pour un même volume de la cavité, un poids identique et, en plus de cela, est plus facile à fabriquer. Ainsi, la structure proposée ne se justifie pas.

180. Dans la question posée, on ne dit mot de quelle façon la charge P a été appliquée sur le ressort. Progressivement ou tout d'un trait? Si la charge a été appliquée progressivement, par petites portions, de telle façon qu'à n'importe quel moment de l'application de la charge le système se trouvait en équilibre, alors, l'expression (1) est fausse. L'énergie de position perdue par la charge sera non pas P^2/c, mais bien $P^2/2c$ et la balance de l'énergie sera rétablie.

Si par contre la charge est appliquée d'un trait, lors de l'affaissement la charge aura encore une énergie cinétique égale à la différence entre les énergies (1) et (2). Dans la suite, la charge va accomplir un mouvement oscillatoire autour de la position d'équilibre jusqu'à ce que son énergie cinétique ne se soit diffusée.

181. D'ordinaire, on rencontre, dans le meilleur des cas, la réponse suivante à la question posée.

L'angle de rotation de la spire dans le plan axial est déterminé par la torsion d'un tronçon du ressort sur la longueur de l'arc AB, à supposer qu'on prend la section B pour une section conventionnellement immobile, c'est-à-dire

$$\psi=\frac{M_t l_{AB}}{GJ_p}=\frac{PRl_{AB}}{GJ_p}\quad(l_{AB}=2\pi Rn_{AB}).$$

Cette réponse est néanmoins erronée. Il n'y aura aucune rotation des spires du ressort dans le plan axial ($\psi=0$).

Mais, objectera notre lecteur, on ne peut pas être d'accord avec ça. En effet, si nous prenons un très petit tronçon ds de la spire, (fig. 439), il y aura une rotation d'une section par rapport à une autre dans le plan axial. C'est pourquoi, si nous prenons une section pour immobile, il y aura nécessairement une rotation de la deuxième dans le plan axial. C'est pour dire que l'affirmation selon laquelle l'angle ψ est égal à zéro dans toutes les sections, n'est pas juste!

Cependant, il ne faut pas oublier que l'élément de la spire en question subit encore une rotation supplémentaire d'un angle ϑ (l'angle de variation de l'inclinaison des spires) dans le plan y_1z_1. C'est pourquoi, si la section (2) s'est retournée dans le plan axial suite à une torsion d'un angle

$$d\varphi=\frac{M_t\,ds}{GJ_p},$$

elle s'est simultanément retournée dans une direction inverse, mais dans le même plan, d'un angle $\vartheta \frac{ds}{R}$ (voir fig. 439).

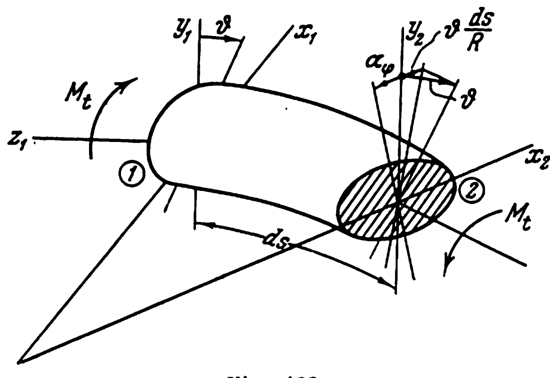


Fig. 439

L'angle de rotation de la section (2) dans le plan axial sera, évidemment,

$$d\psi = d\varphi - \vartheta \frac{ds}{R},$$

or, on sait que

$$\vartheta = \frac{PR^2}{GJ_p},$$

et, comme $M_t = PR$, on aura, évidemment, $d\psi = 0$.

182. Considérons l'anneau comme une poutre à trois dimensions. Dans chaque section d'une spire du ressort tendu apparaissent un moment de torsion $M_t = PR \cos \alpha$, ainsi qu'un moment fléchissant $M_{fl} = PR \sin \alpha$ (fig. 440).

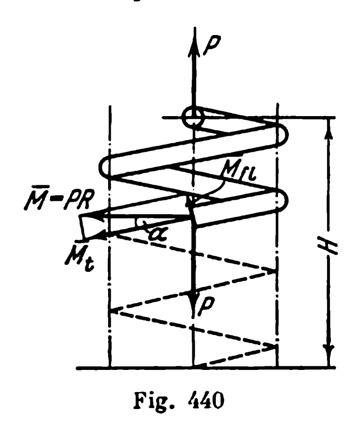


Fig. 440

Déterminons au préalable l'accroissement de la hauteur du ressort ΔH:

$$\Delta H = \int_l \frac{M_{fl} M_{1fl}\, ds}{EJ} + \int_l \frac{M_t M_{1t}\, ds}{GJ_p},$$

M_{1fl} et M_{1t} étant le moment fléchissant et le moment de torsion créés par des forces unitaires appliquées à la place des forces P; ces moments sont respectivement égaux à

$$M_{1fl} = R \sin \alpha, \quad M_{1t} = R \cos \alpha;$$

par conséquent,

$$\Delta H = \frac{PR^2 l}{EJ} \sin^2 \alpha + \frac{PR^2 l}{GJ_p} \cos^2 \alpha, \tag{1}$$

l étant la longueur des spires du ressort.

Trouvons l'angle dont va se retourner le bout supérieur du ressort par rapport au bout inférieur dans le plan horizontal. Appliquons sur les bouts du ressort des moments unitaires (fig. 441, *a*).

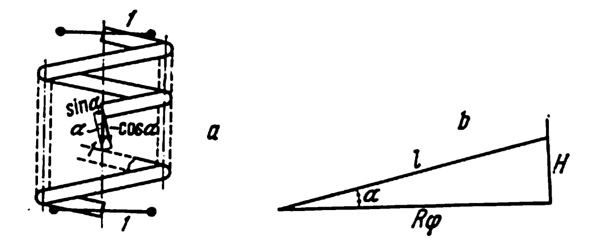


Fig. 441

Nous aurons alors

$$M_{1fl} = -\cos\alpha, \quad M_{1t} = \sin\alpha;$$

$$\Delta\varphi = \int_l \frac{M_{fl} M_{1fl}\, ds}{EJ} + \int_l \frac{M_t M_{1t}\, ds}{GJ_p}; \tag{2}$$

$$\Delta\varphi = PRl\left(\frac{1}{GJ_p} - \frac{1}{EJ}\right)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Examinons la développée du ressort (fig. 441, *b*). De toute évidence,

$$R^2\varphi^2 + H^2 = l^2.$$

Comme l reste constant, on a

$$2R\varphi^2\Delta R + R^2 2\varphi\cdot\Delta\varphi + 2H\Delta H = 0,$$

ici le signe Δ signifie l'accroissement du paramètre correspondant. De cette expression, nous obtenons:

$$\Delta R = -\frac{R}{\varphi}\Delta\varphi - \frac{H}{R\varphi^2}\Delta H.$$

Mettons ici $\Delta\varphi$ et ΔH:

$$\Delta R = -\frac{PR^2l}{\varphi}\left(\frac{1}{GJ_p} - \frac{1}{EJ}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{PHRl}{\varphi^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EJ} + \frac{\cos^2\alpha}{GJ_p}\right). \tag{3}$$

Du triangle de la fig. 441, *b*, il découle que

$$l = \frac{\varphi R}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad H = \varphi R \operatorname{tg}\alpha.$$

Outre cela, il est évident que

$$\varphi = 2\pi n, \quad \Delta\varphi = 2\pi\,\Delta n,$$

n étant le nombre de spires. Des expressions (1), (2) et (3), éliminons l, H et φ:

$$\Delta H = \frac{PR^3 n 2\pi}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EJ} + \frac{\cos^2\alpha}{GJ_p}\right),$$

$$\Delta n = PR^2 n\left(\frac{1}{GJ_p} - \frac{1}{EJ}\right)\sin\alpha,$$

$$\Delta R = -\frac{2PR^3\sin\alpha}{GJ_p} + \frac{PR^3}{EJ}\sin\alpha\,(1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha).$$

Si le ressort est fabriqué dans du fil rond de diamètre d, on aura

$$GJ_p = G\frac{\pi d^4}{32},$$

$$EJ = G(1+\mu)\frac{\pi d^4}{32},$$

et alors nous obtenons

$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}\,\frac{1+\mu\cos^2\alpha}{(1+\mu)\cos\alpha},$$

$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\,\frac{\mu\sin\alpha}{1+\mu},$$

$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\,\frac{\sin\alpha}{1+\mu}\,\frac{1+2\mu\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Les signes qui précèdent les deuxièmes membres dans les expressions obtenues, montrent que lorsque le ressort est soumis à la traction, sa longueur croît ($\Delta H > 0$), le nombre de spires augmente ($\Delta n > 0$) tandis que le rayon diminue ($\Delta R < 0$). Si l'angle α est petit, nous aurons

$$\Delta H = \frac{64PR^3 n}{Gd^4},$$

$$\Delta n = \frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\,\frac{\mu\alpha}{1+\mu},$$

$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\,\frac{1+2\mu}{1+\mu}\alpha.$$

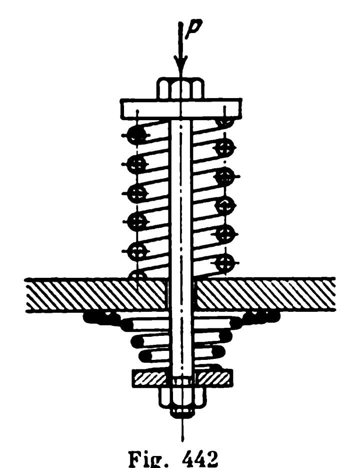


Fig. 442

183. Pour cela, il faut conférer au ressort profilé une précompression, par exemple, à l'aide d'un second ressort (fig. 442). Quand on appliquera une sollicitation à un tel système, le nombre de spires en service va augmenter.

184. Dans la position indiquée, le système ne se trouve pas en équilibre. Si nous essayons de déterminer la valeur de la réaction de l'appui inférieur sans tenir compte de la déformation du système,

nous obtiendrons un résultat qui n'a aucun sens pratique:

$$R = \pm\infty.$$

Effectivement, en égalant à zéro la somme des moments créés par toutes les forces par rapport à l'articulation d'en haut (fig. 443), nous obtiendrons

$$R \cdot 0 + Pa = 0,$$

c'est de là que nous trouvons la valeur de la réaction R indiquée plus haut.

Pour déterminer la réaction, il faut, par conséquent, tenir compte du déplacement horizontal du galet d'en bas. Nous considérerons

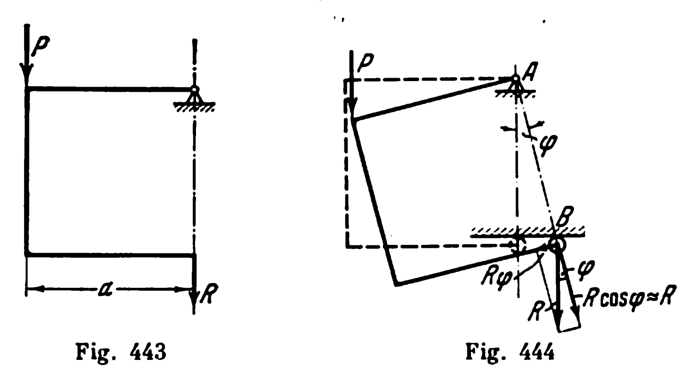


Fig. 443 Fig. 444

que l'équilibre du système survient pour un déplacement angulaire de l'appui inférieur de φ (fig. 444).

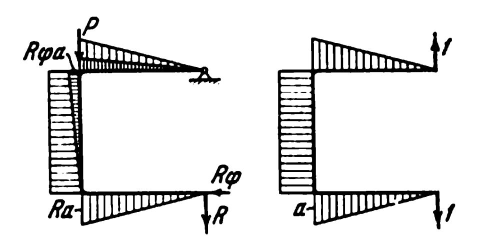


Fig. 445

Des conditions d'équilibre on aura, évidemment, $P = R\varphi$. Suite à la déformation du portique, le segment AB a augmenté de

$$a(1-\cos\varphi) \approx \frac{a\varphi^2}{2}$$

D'autre part, cette même grandeur peut être déterminée en multipliant les épures des forces données par les épures des forces unitaires (fig. 445). Ainsi, nous obtenons

$$\frac{Ra^3}{EJ}\frac{5}{3}\left(1+\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{a\varphi^2}{2}.$$

Puisque les déplacements du portique ne sont pas grands, on peut négliger $\varphi/2$ entre parenthèses en comparaison avec l'unité. Ensuite, en mettant dans le deuxième membre de l'équation P/R à la place de φ, nous obtenons

$$R = \sqrt[3]{\frac{3P^2EJ}{10a^2}}.$$

185. Pour un système semblable à celui montré sur la fig. 169, de nouvelles formes d'équilibre apparaissent pour de grands déplacements.

En particulier, si dans la barre les contraintes ne dépassent pas la limite de proportionnalité, pour $P > 3{,}2EJ/l^2$, la barre a, en

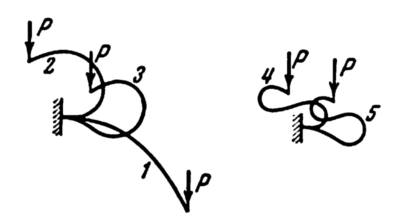


Fig. 446

plus de la forme initiale principale, encore deux formes (*2* et *3*) (fig. 446). La forme *2* est stable tandis que la forme *3*, instable. Pour $P > 7{,}1EJ/l^2$, il peut exister encore des formes instables d'équilibre *4* et *5* (fig. 446), etc.

Avec une augmentation progressive de la force P, la forme *1* ne peut, naturellement, pas se transformer dans la forme *2* ou dans une autre forme quelconque. Cependant, si au préalable on rejette la barre à gauche et puis on la soumet à une sollicitation par une force plus grande que $3{,}2EJ/l^2$, la barre épousera la forme d'équilibre *2*.

186. Prenons deux systèmes de coordonnées orientés de façon arbitraire. Le premier, XYZ, avec pour origine le point A et le second, xyz, avec pour origine le point B (fig. 447).

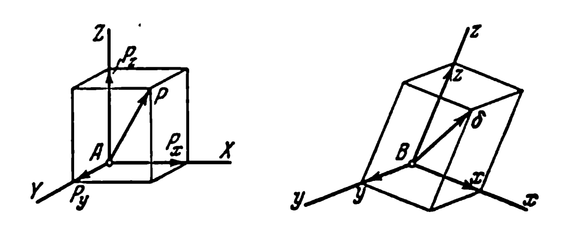


Fig. 447

Désignons par P_x, P_y, P_z les composantes de la force P selon les axes XYZ; on a

$$P_x = Pl, \quad P_y = Pm, \quad P_z = Pn,$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la force P dans le système XYZ.

Désignons les déplacements du point B selon les axes xyz par x, y, z. Ces déplacements seront liés aux composantes des forces par une relation linéaire:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= Pl = c_{xx}x + c_{xy}y + c_{xz}z, \\ P_y &= Pm = c_{yx}x + c_{yy}y + c_{yz}z, \\ P_z &= Pn = c_{zx}x + c_{zy}y + c_{zz}z, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où c_{xx}, c_{xy}, . . . certains coefficients constants exprimant la rigidité. Par exemple, c_{xy} est la force qu'il faut appliquer au point A dans la direction des x pour obtenir un déplacement égal à l'unité au point B et dans la direction des y.

Elevant au carré les deux membres de chaque égalité (1) et faisant leur addition, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} P^2 = {} & (c_{xx}^2 + c_{yx}^2 + c_{zx}^2)\, x^2 + (c_{xy}^2 + c_{yy}^2 + c_{zy}^2)\, y^2 + \\ & + (c_{xz}^2 + c_{yz}^2 + c_{zz}^2)\, z^2 + 2\,(c_{xx}c_{xy} + c_{yx}c_{yy} + \\ & + c_{zx}c_{zy})\, xy + 2\,(c_{xx}c_{xz} + c_{yx}c_{yz} + c_{zx}c_{zz})\, xz + \\ & + 2\,(c_{xy}c_{xz} + c_{yy}c_{yz} + c_{zy}c_{zz})\, yz. \end{aligned}$$

Ainsi, nous voyons que le vecteur de déplacement au point B va décrire une surface de second degré ayant son centre dans ce même point. Cette surface peut être soit un hyperboloïde à deux ou à une nappe soit un ellipsoïde. De par l'essence physique du problème, cette surface ne peut avoir de points infiniment éloignés; par conséquent, ce sera un ellipsoïde ou bien une de ces surfaces dans lesquelles l'ellipsoïde peut dégénérer.

L'on comprend que ce qui vient d'être dit n'est pas encore une démonstration exhaustive mais tout simplement une supposition. Une démonstration rigoureuse, que nous omettons ici à cause du caractère encombrant des calculs, consiste en ceci. Au moyen d'une rotation des systèmes des coordonnées XYZ et xyz, on transforme les équations (1) de telle sorte que six coefficients c_{xy}, c_{yx}, c_{xz}, c_{zx}, c_{yz} et c_{zy} deviennent nuls. Pour cela on choisit, de façon requise, trois angles de rotation du premier et trois angles de rotation du second systèmes des coordonnées. On aura alors

$$Pl = c_{xx}x, \qquad Pm = c_{yy}y, \qquad Pn = c_{zz}z,$$

de là, en éliminant l, m, n, nous obtiendrons l'équation de l'ellipsoïde:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{P}{c_{xx}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{P}{c_{yy}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{P}{c_{zz}}\right)^2} = 1.$$

187. Quand une section de l'anneau tourne dans le plan axial d'un angle φ, un allongement tangentiel $\varepsilon = \frac{\Delta}{a}$ apparaît au point

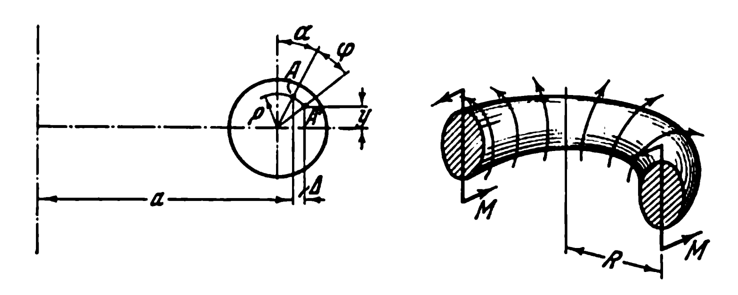


Fig. 448

A avec pour coordonnées ρ, α (fig. 448). Or, d'après les données de la figure

$$\Delta = \rho\,[\sin(\alpha+\varphi) - \sin\alpha], \quad a = R + \rho\sin\varphi.$$

Comme ρ est beaucoup plus petit que R, on a $a \approx R$. C'est pourquoi, nous avons

$$\varepsilon = \frac{\rho}{R}\,[\sin(\alpha+\varphi) - \sin\alpha],$$

$$\sigma = E\frac{\rho}{R}\,[\sin(\alpha+\varphi) - \sin\alpha]. \tag{1}$$

Les contraintes σ créent dans la section de l'anneau un moment fléchissant par rapport au diamètre horizontal ; ce moment est égal à

$$M = \int\limits_F \sigma y\,dF,$$

où dF et y sont respectivement égaux à

$$dF = \rho\,d\alpha\,d\rho, \quad y = \rho\cos(\alpha+\varphi).$$

Nous obtenons alors

$$M = \frac{E}{R}\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi} \rho^2\,[\sin(\alpha+\varphi) - \sin\alpha]\cos(\alpha+\varphi)\,d\rho\,d\alpha \tag{2}$$

ou

$$M = \frac{Er^4}{4R}\,\pi\sin\varphi.$$

D'autre part, des conditions d'égalité d'une moitié de l'anneau (fig. 448) découle que $M = mR$. Par conséquent,

$$\sin\varphi = \frac{4mR^2}{E\pi r^4}.$$

Pour $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, le moment m croît pour atteindre, pour $\varphi = \pi/2$, sa valeur maximum

$$m_{\max} = \frac{E\pi r^4}{4R^2}.$$

L'accroissement ultérieur de l'angle φ exige un moment plus petit. Pour $\varphi = \pi$, c'est-à-dire quand l'anneau est retourné à l'envers, $m = 0$. Avec cela, l'anneau se trouve dans un état d'équilibre instable et, pour une perturbation toute petite qu'elle soit, il va regagner sa position initiale.

Pour $\varphi > \pi$, le moment $m < 0$. Cela signifie que pour maintenir l'anneau dans une position donnée, il faut dans ce cas appliquer un moment de signe inverse.

On peut considérer la valeur obtenue plus haut de $m_{\max}$ comme la valeur critique du moment, valeur pour laquelle se produit, comme on dit, le « chavirement » de l'anneau.

188. L'expression (1) obtenue pour les contraintes σ dans le problème précédent

$$\sigma = E\frac{\rho}{R}[\sin(\alpha+\varphi) - \sin\alpha]$$

se modifie par l'introduction d'un terme supplémentaire

$$\frac{Ex}{\rho} = E\frac{\rho\sin\alpha}{R},$$

reflétant la précontrainte de flexion. Nous aurons cette fois-ci

$$\sigma = \frac{E\rho}{R}\sin(\alpha+\varphi).$$

A la place de l'expression (2), nous obtiendrons

$$M = \frac{E}{R}\int_0^r\int_0^{2\pi}\rho^3\sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\varphi)\,d\rho\,d\varphi = 0.$$

Cela signifie qu'un anneau doté des précontraintes indiquées va se retourner dans le plan axial sans qu'on ait à appliquer des sollicitations extérieures. Un tel anneau se présente pour ainsi dire comme un mécanisme élastique. Le lecteur peut sans trop d'efforts vérifier expérimentalement ce qui vient d'être dit.

Des propositions ont été émises pour employer le phénomène décrit comme moyen de mesure de la valeur du frottement interne qui se produit dans les matériaux en déformation.

189. Le problème posé peut être résolu dans le cadre d'une approche statique.

Sans tenir compte de l'effet dynamique lié à une rotation non uniforme du câble, déterminons le mode de variation du moment

d équilibre à la sortie pour un moment constant à l'entrée. Désignons par $1/\rho$ la courbure du câble et, en négligeant les forces de frottement, établissons l'équation d'équilibre d'un élément de longueur ds,

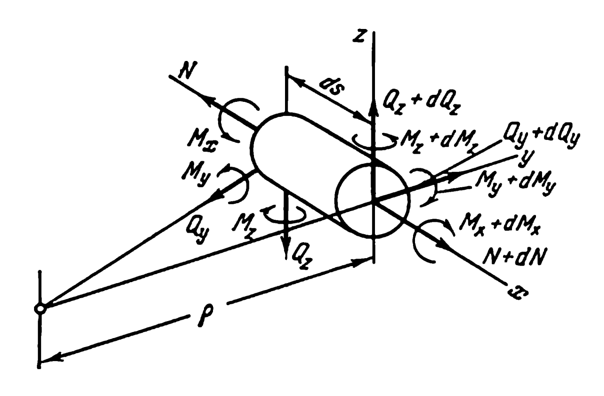


Fig. 449

prélevé du câble (fig. 449). Les réactions agissant sur cet élément du côté du guipage, sont normales à la surface du câble et ne créent pas de moment par rapport à l'axe x. C'est pourquoi, égalant à zéro la somme des moments par rapport à l'axe x, nous aurons

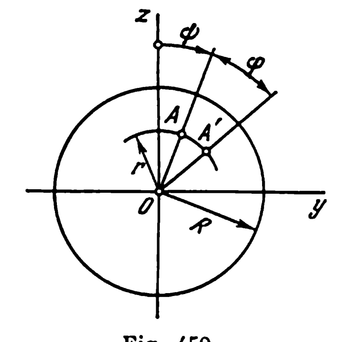


Fig. 450

$$\frac{dM_x}{ds} = \frac{M_y}{\rho}. \tag{1}$$

Par conséquent, en l'absence des forces de frottement, le moment M_x change le long de l'axe dans la mesure où existe le moment M_y, c'est-à-dire un moment fléchissant agissant dans un plan perpendiculaire au plan de la courbure du câble.

Soit dans une section du câble un point A avec pour coordonnées polaires r et ψ (fig. 450). La contrainte normale dans ce point peut être représentée sous forme de deux termes. Le premier représente la contrainte qui apparaît dans le câble lorsque ce dernier se courbe selon la forme du guipage, c'est-à-dire

$$\sigma' = Er \sin \psi \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right),$$

$1/\rho_0$ étant la courbure du câble avant qu'il ne soit placé dans le guipage.

Le second terme représente la contrainte qui apparaît dans le point A après la rotation du câble dans le guipage d'un angle φ.

Trouvons pour commencer le déplacement du point A le long de l'axe y (fig. 450):

$$r \sin(\psi + \varphi) - r \sin \psi.$$

L'allongement relatif le long de l'axe x sera

$$\frac{r}{\rho}[\sin(\psi+\varphi) - \sin\psi],$$

tandis que la contrainte

$$\sigma'' = E\frac{r}{\rho}[\sin(\psi+\varphi) - \sin\psi].$$

La contrainte totale sera

$$\sigma_x = \sigma' + \sigma'' = Er\left[\frac{1}{\rho}\sin(\psi+\varphi) - \frac{1}{\rho_0}\sin\psi\right].$$

Trouvons maintenant le moment fléchissant M_y:

$$M_y = \int_F \sigma z\, dF,$$

ou

$$M_y = \int_0^R \int_0^{2\pi} Er\left[\frac{1}{\rho}\sin(\psi+\varphi) - \frac{1}{\rho_0}\sin\psi\right] r\cos(\psi+\varphi)\, r\, d\psi dr,$$

d'où

$$M_y = \frac{EJ}{\rho_0}\sin\varphi.$$

L'équation (1) prendra la forme suivante

$$\frac{dM_x}{ds} = \frac{EJ}{\rho\rho_0}\sin\varphi.$$

Intégrons cette expression par rapport à s en supposant que toutes les sections se sont retournées d'un même angle φ:

$$M_x = EJ\sin\varphi\int_0^s \frac{ds}{\rho\rho_0} + C.$$

Si un moment M_1 est appliqué à une extrémité du câble (pour $s=0$), le moment d'équilibre M_2 sera, pour $s=l$, suivant:

$$M_2 = M_1 + EJ\sin\varphi\int_0^l \frac{ds}{\rho\rho_0}.$$

Ainsi, nous voyons que le moment d'équilibre à l'extrémité du câble a augmenté d'un terme supplémentaire qui change proportionnellement au sinus de l'angle de rotation du câble. Si par contre

on rend égaux les moments M_1 et M_2, lors de la rotation du câble les conditions d'équilibre ne seront pas remplies et la rotation ne sera pas uniforme à la sortie.

Le moment M_2 ne dépendra pas de l'angle φ si

$$\int_0^l \frac{ds}{\rho\rho_0} = 0.$$

La condition suffisante d'un fonctionnement normal du câble d'un compteur de vitesse est $1/\rho_0 = 0$, en d'autres mots, il suffit que le câble soit droit avant qu'on ne le place dans le guipage.

190. Pour la corde, la fréquence des variations correspondant au ton principal se détermine comme on sait, par la formule

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{ml}},$$

T étant l'effort de tension dans la corde, m, sa masse et l, sa longueur.

Dans le premier cas de fixation, au fur et à mesure qu'augmente l'effort de tension, la masse de la corde en vibration va, pour une longueur invariable l_0, changer pour atteindre, de toute évidence,

$$m_0 \frac{l_0}{l_0+\Delta l},$$

m_0 étant la masse de la corde tendue d'une longueur l_0. Ainsi, nous obtenons:

$$\nu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{m_0 l_0^2}(l_0+\Delta l)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{T\left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right)}}{\sqrt{m_0 l_0}},$$

$$2\nu_1\sqrt{m_0 l_0} = \sqrt{T\left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right)}.$$

Dans le second cas, trouvons

$$\nu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{m_0(l_0+\Delta l)}},$$

$$2\nu_2\sqrt{m_0 l_0} = \sqrt{\frac{T}{1+\frac{\Delta l}{l_0}}}.$$

Dans les deux cas $\Delta l/l_0$ est donné comme une fonction de l'effort de tension (fig. 175), c'est pourquoi, les relations ν_1 et ν_2 en fonction de T se déterminent aisément. La fig. 451 montre cette courbe de dépendance.

Ainsi, nous voyons que pour le premier procédé de tirage la fréquence des vibrations du fil augmente avec le tirage. Dans le deuxième cas, la fréquence peut diminuer avec l'augmentation de

l'effort de tension. Ce phénomène trouve sa confirmation expérimentale. Il ne faut tout simplement pas oublier que ce n'est pas tout caoutchouc qui possède une courbe de traction de même type.

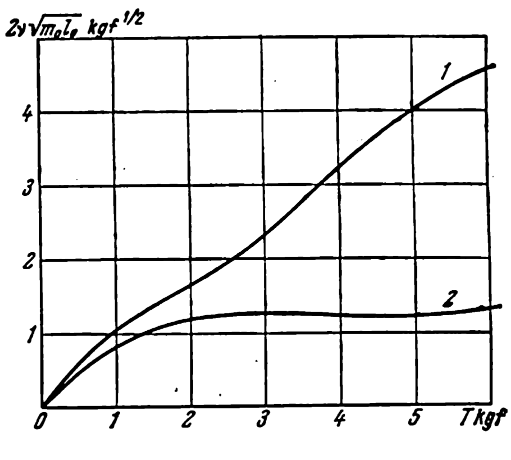


Fig. 451

191. Le problème ne contient pas de difficultés de principe. Naturellement, la poutre obtenue de la façon décrite vibrera autour de la position d'équilibre tout comme une poutre ordinaire encastrée aux extrémités et le déplacement h n'exercera aucune influence sur la fréquence.

Ecrivons l'équation de mouvement d'une poutre flexible (fig. 452)

$$EJy^{(IV)} = -\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

y étant le déplacement compté à partir de la position d'équilibre.

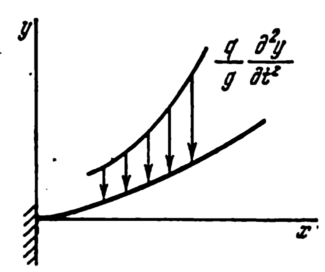


Fig. 452

Posant $y = Y \sin \omega t$, nous obtiendrons

$$Y^{(IV)} - a^4 Y = 0 \quad \left(a^4 = \frac{q\omega^2}{gEJ}\right),$$

de là

$$Y = A \sin ax + B \cos ax + C \operatorname{sh} ax + D \operatorname{ch} ax.$$

Cette fonction doit satisfaire aux conditions limites suivantes:

$$\text{pour } x = 0, \quad Y = 0 \quad \text{et} \quad Y' = 0,$$
$$\text{pour } x = l, \quad Y = 0 \quad \text{et} \quad Y' = 0.$$

Egalant à zéro le déterminant du système homogène des équations, nous aboutissons à l'équation transcendante suivante:

$$\cos al \operatorname{ch} al = 1.$$

De là $al = 4{,}73$ ou $\omega = 4{,}73^2 \sqrt{\frac{gEJ}{ql^4}}$.

Jusqu'à présent, tout se passait suivant un schéma ordinaire. Or, dans le problème posé, la longueur l dépend elle-même de q.

Dans la position initiale d'équilibre, la déformée a l'allure d'une courbe du quatrième degré :

$$y_0 = \frac{q}{EJ}\left(\frac{x^4}{24} + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0\right).$$

Comme pour $x = 0$, y_0 et y_0' deviennent nuls, on aura $C_0 = C_1 = 0$. Pour $x = l$, nous avons $y_0' = 0$ et $y_0'' = 0$. Ce qui donne

$$y_0 = \frac{q}{EJ}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{lx^3}{9} + \frac{l^2x^2}{12}\right).$$

Or, pour $x = l$, le déplacement est égal à h. C'est de là que se détermine la longueur l:

$$l^4 = \frac{72EJh}{q}.$$

Revenons maintenant à l'expression qui donne la fréquence; éliminons de là l^4:

$$\omega = \frac{4{,}73^2}{\sqrt{72}} \sqrt{\frac{g}{h}} = 2{,}63 \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Il s'avère que la fréquence des vibrations propres d'une poutre ainsi obtenue ne dépend ni de la masse de la poutre ni de sa rigidité mais uniquement de la valeur de h.

Fait intéressant, n'est-ce pas? Nombreux sont à le considérer ainsi en tout cas.

Paraphrasant le sophisme de Gardner sur les nombres intéressants, on peut dire qu'il n'y a pas de problèmes non intéressants, sinon tous les problèmes qui nous sont connus pourraient se subdiviser en deux classes : les problèmes intéressants et ceux qui ne le sont pas. Mais parmi ces derniers, on pourrait toujours trouver au moins un problème qui serait le moins intéressant, ce qui obligerait à lui témoigner de l'intérêt et à le porter donc dans la classe des problèmes intéressants. En agissant ainsi, nous devrions arriver à cette conclusion-ci que parmi tous les problèmes qui nous sont connus, il n'existe pas de non intéressants.

192. Supposons que le cylindre retourné à l'envers conserve sa forme initiale, c'est-à-dire la forme d'un cylindre de rayon R ; déterminons les contraintes qui, sous cette condition, apparaîtront dans le cylindre.

Pour des couches situées à une distance z de la surface médiane, l'allongement relatif dans une direction tangentielle sera déterminé par la variation de la courbure du cylindre de $1/R$ à $-1/R$. Si dans un élément $d\varphi$ la longueur de cette fibre était avant la déformation (fig. 453) de

$$(R + z)\, d\varphi,$$

pour le cylindre retourné à l'envers, elle sera de

$$(R - z)\, d\varphi.$$

L'allongement relatif dans la direction tangentielle sera

$$\varepsilon_t = \frac{(R-z)\, d\varphi - (R+z)\, d\varphi}{(R+z)\, d\varphi} \approx -z\frac{2}{R}.$$

L'allongement relatif ε_x dans la direction axiale est égal à zéro.

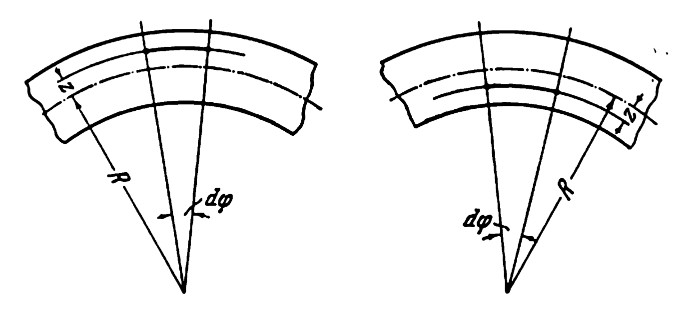


Fig. 453

Par conséquent, nous obtenons

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_x) = -\frac{zE}{1-\mu^2}\frac{2}{R},$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_t) = -\mu\frac{zE}{1-\mu^2}\frac{2}{R}.$$

Ainsi, nous arrivons à la conclusion que pour qu'un cylindre retourné à l'envers conserve sa forme cylindrique, il faut appliquer à ses extrémités les contraintes σ_x que montre la fig. 454.

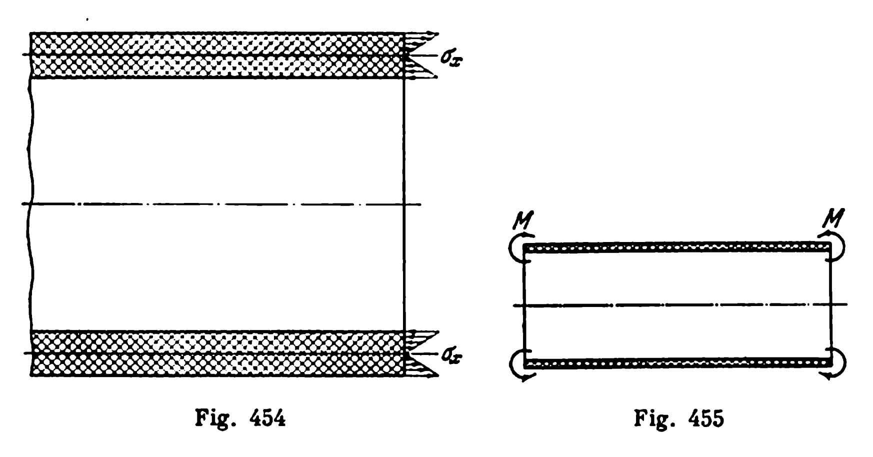


Fig. 454 Fig. 455

Il va de soi que la forme réelle du cylindre retourné à l'envers sera la même que celle qu'adopterait un cylindre qui serait sollicité à ses extrémités par un système inverse de forces (fig. 455). Le mo-

ment M auquel se ramènent les contraintes σ_x par unité de l'arc du contour, sera

$$M = -\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z\, dz = \mu \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{2}{R}.$$

Au moyen de deux sections axiales, prélevons du cylindre une bandelette dont la largeur est égale à l'unité (fig. 456). On peut

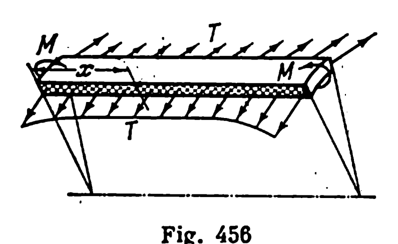


Fig. 456

considérer cette bandelette comme une poutre reposant sur une fondation élastique car la composante radiale T des forces agissant sur cette bandelette du côté des parties voisinantes de l'enveloppe est proportionnelle à la flèche w de la bandelette.

L'effort T revenant à l'unité de longueur sera

$$T = \frac{w}{R} Eh,$$

tandis que sa composante radiale

$$q = -\frac{T}{R} = -\frac{w}{R^2} Eh.$$

Le signe moins a été adopté pour q suite à ce que cette sollicitation est dirigée dans un sens opposé à la flèche. Or,

$$\frac{EJ}{1-\mu^2} w^{(IV)} = q = -\frac{w}{R^2} Eh,$$

où

$$\frac{EJ}{1-\mu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

est la rigidité de la bandelette en flexion gênée. Nous aurons alors

$$w^{(IV)} + 4k^4 w = 0, \quad 4k^4 = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2}.$$

Résolvant cette équation, nous obtiendrons

$$w = e^{-kx}(A \sin kx + B \cos kx) + e^{+kx}(C \sin kx + D \cos kx).$$

Comme le cylindre est suffisamment long, nous nous limiterons à l'étude des déplacements dans la zone d'un seul contour. Rejetant la partie croissante de l'équation, c'est-à-dire posant $C = D = 0$,

nous obtiendrons

$$w=e^{-kx}(A\sin kx+B\cos kx).$$

Les constantes A et B se déterminent des conditions suivantes:
pour $x=0$

$$M_{\text{fl}}=\frac{EJ}{1-\mu^2}w''=M,$$

pour $x=0$

$$Q=M'_{\text{fl}}=0 \quad (w'''=0),$$

ou

$$-\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}2k^2A=\mu\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{2}{R},\quad A+B=0,$$

de là

$$A=-B=-\frac{\mu}{k^2R}$$

$$w=\frac{\mu}{k^2R}e^{-kx}(\cos kx-\sin kx),\quad w_{\max}=w|_{x=0}=\frac{\mu}{k^2R}.$$

Or, comme

$$k^2=\frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{Rh},$$

on aura

$$w_{\max}=\frac{\mu h}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}.$$

Pour $\mu=1/2$,

$$w_{\max}=h/3.$$

La forme du cylindre retourné à l'envers, dans une version exagérée, est représentée sur la fig. 457.

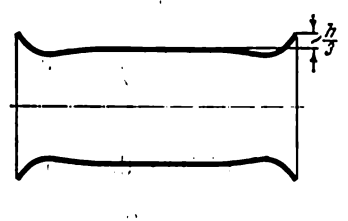


Fig. 457

193. Trouvons les racines de l'équation caractéristique

$$\alpha^4-\frac{h\sigma_x}{D}\alpha^2+4k^4=0.$$

C'est-à-dire

$$\alpha^2=\frac{h\sigma_x}{2D}\pm\sqrt{\left(\frac{h\sigma_x}{2D}\right)^2-4k^4}.$$

On peut négliger le terme indiqué dans les données du problème dans le cas où

$$\frac{h\sigma_x}{2D} \ll 2k^2,$$

ce qui, après substitution des valeurs de D et k, conduit à la condition :

$$\sigma_x \ll \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\,\frac{h}{R}.$$

Il est aisé d'établir que dans beaucoup de problèmes pratiques cette condition n'est pas toujours respectée. Aussi, faut-il ne pas perdre de vue cet état de choses quand on étudie l'effet de bord.

Dans le cas d'une épaisseur assez petite, c'est-à-dire pour les enveloppes à rigidité en flexion petite au point de disparaître (enveloppes à grandes déformations), on ne peut étudier l'effet de bord qu'en tenant compte du terme contenant la dérivée seconde de w. Ici, le passage limite dans l'équation (1) (voir les données du problème) devient possible. Multipliant par D tous les membres de l'équation et posant celle-ci égale à zéro, nous obtiendrons

$$w'' - \beta^2 w = \frac{p}{h\sigma_x} + \frac{\mu}{R},$$

où $\beta^2 = \frac{E}{R^2\sigma_x}$.

De là

$$w = Ae^{-\beta x} + Be^{+\beta x} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{p}{h\sigma_x} - \frac{\mu}{R}\right).$$

Rejetant la partie croissante de w et choisissant A tel que pour $x = 0$ la variable w s'annule, nous obtiendrons

$$w = R\left(\frac{pR}{Eh} - \mu\,\frac{\sigma_x}{E}\right)(1 - e^{-\beta x}).$$

La vitesse d'amortissement est déterminée par la grandeur β.

194. Les conditions d'équilibre donnent

$$m\omega^2 (l + u) = P = f(u).$$

Résolvons graphiquement (fig. 458) cette équation par rapport à u. Les racines de cette équation sont déterminées par les coordonnées des points d'intersection des droites $m\omega^2 (l + u)$ avec la courbe $P = f(u)$. Menant quelques rayons, construisons la courbe de dépendance de $m\omega^2 l$ par rapport à u (fig. 458).

Pour $m\omega^2 l = 1{,}0$, la bille change, par bond. sa position en passant d'un point caractérisé par la valeur de déplacement $u = 1{,}8$, au point $u = 7$. Un bond inverse a lieu pour $m\omega^2 l = 0{,}8$.

L'on comprend qu'un bond direct peut avoir lieu pour $m\omega^2 l <$ $< 1{,}0$ (mais plus grand que 0,8), si on communique à la bille une perturbation suffisamment grande.

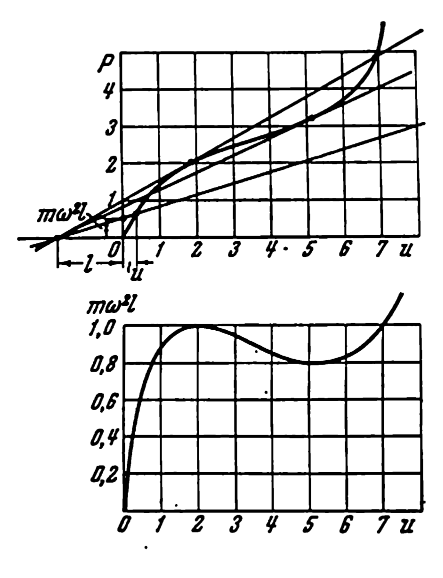


Fig. 458

195. La hauteur d'emplacement du point O du système déformé par rapport au plan horizontal sera $H - w$. L'angle d'inclinaison des barres sur l'horizon sera alors

$$\alpha = \frac{H-w}{l}.$$

Si l'on désigne par N l'effort de compression dans les barres, des conditions d'équilibre on obtiendra, évidemment,

$$P = 3N\alpha = 3N\,\frac{H-w}{l}.$$

D'autre part, l'effort N se détermine par la valeur du raccourcissement de chaque barre

$$N = \frac{EF\Delta l}{l}.$$

En partant des considérations purement géométriques (fig. 459) exprimons Δl au moyen de w:

$$\Delta l = l - l\,\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}.$$

A cause du fait que les angles α_0 et α sont petits, nous avons

$$\Delta l \approx l\left[1-\frac{1-\frac{\alpha_0^2}{2}}{1-\frac{\alpha^2}{2}}\right]=\frac{l}{2}(\alpha_0^2-\alpha^2).$$

En substituant α_0 et α, nous obtiendrons

$$\Delta l=\frac{w}{l}\left(H-\frac{w}{2}\right).$$

L'effort N sera alors

$$N=\frac{EF}{l^2}w\left(H-\frac{w}{2}\right).$$

La force P s'exprime de la façon suivante:

$$P=\frac{3EF}{l^3}w(H-w)\left(H-\frac{w}{2}\right).$$

La fonction obtenue peut être mise sous une forme adimension-

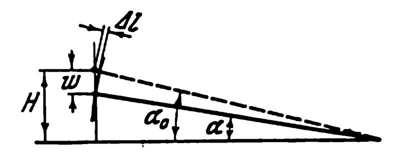


Fig. 459

nelle

$$\frac{Pl^3}{3EFH^3}=\frac{w}{H}\left(1-\frac{w}{H}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{w}{H}\right)$$

et représentée sous forme de courbe (fig. 460). Cette courbe a deux points extrémaux A et B. Sur le premier tronçon OA a lieu un accroissement simultané de la charge et de la flèche. Lorsque la force P atteint une valeur correspondant au premier extrémum, on assiste à un changement par à-coups de la flèche (AC, comme le montrent les flèches). Si l'on continue d'augmenter la charge, le déplacement w continue de croître. Si, maintenant, on décharge le système, les barres seront maintenues dans un état libre, pour $w/H = 2$, c'est-à-dire, le point nodal des barres se retrouvera d'une valeur H plus bas que le plan horizontal immobile. En appliquant une charge de signe inverse, on peut provoquer un flambage-claquement (snaping-through) inverse BD du système et faire revenir ce dernier à sa position initiale.

Le tronçon AB de la courbe correspond aux formes instables d'équilibre.

Ainsi, pour des valeurs de la force P se trouvant entre les deux extrémums (fig. 460)

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{EFH^3}{l^3}<P<+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{EFH^3}{l^3},$$

le système a trois formes d'équilibre: deux stables et une troisième, intermédiaire, instable.

En particulier, pour $P = 0$, cette forme instable correspond à une disposition des barres dans un plan horizontal ($w/H = 1$).

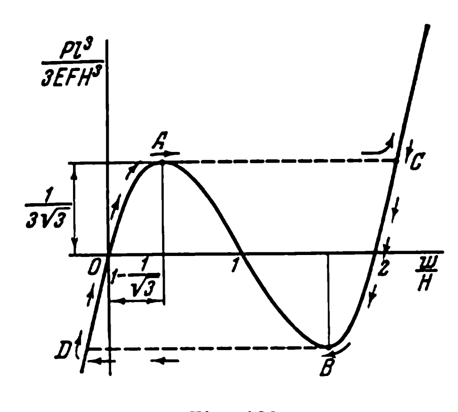


Fig. 460

Une très petite déviation de cette position amènera le système à occuper soit une position supérieure soit, inférieure.

196. Nous supposerons que sous l'action de la force, la section transversale rectangulaire ne va pas subir de déformations, mais se retournera d'un angle φ autour d'un certain point O se trouvant à une distance c de l'axe de rotation (fig. 461).

Examinons dans une section du ressort un point A ayant pour coordonnées x et y. Après la rotation, ce point adoptera la position A' et se rapprochera de l'axe de symétrie de

$$\Delta = [x\cos(\alpha-\varphi)-y\sin(\alpha-\varphi)]-[x\cos\alpha-y\sin\alpha].$$

Par suite du fait que les angles α et φ sont petits, on peut écrire:

$$\cos\alpha\approx 1-\frac{1}{2}\alpha^2,\quad \sin\alpha\approx\alpha;$$

$$\cos(\alpha-\varphi)\approx 1-\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)^2,\ \sin(\alpha-\varphi)\approx(\alpha-\varphi),$$

et alors, nous obtenons

$$\Delta = x\varphi\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)+y\varphi.$$

L'allongement relatif tangentiel correspondant au déplacement Δ sera

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta}{c - x\cos\alpha + y\sin\alpha} \approx \frac{\Delta}{c-x},$$

$$\varepsilon_t = \frac{x\varphi\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) + y\varphi}{c-x}.$$

La contrainte σ_t est égale à $\sigma_t = E\varepsilon_t$.

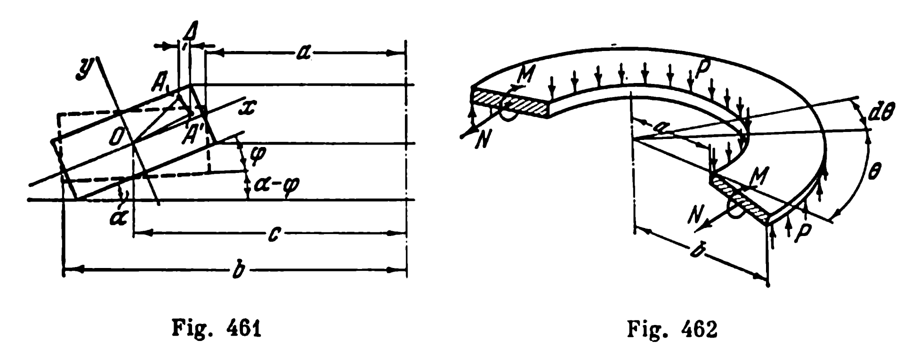


Fig. 461 Fig. 462

Déterminons maintenant la force normale dans une section axiale du ressort

$$N = \int_{c-b}^{c-a}\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t\, dx\, dy\,;$$

mettant ici la valeur de σ_t obtenue plus haut, nous aurons

$$N = E\int_{c-b}^{c-a}\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{x\varphi\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)+y\varphi}{c-x}\, dx\, dy = Eh\varphi\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)\left(a-b+c\ln\frac{h}{a}\right).$$

Or, en considérant les conditions d'équilibre d'une moitié de l'anneau (fig. 462), nous nous convaincons de ce que $N = 0$. De cette condition trouvons

$$c = \frac{b-a}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Trouvons maintenant le moment M:

$$M = \int_{c-b}^{c-a}\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t\,[x\sin(\alpha-\varphi) + y\cos(\alpha-\varphi)]\, dx\, dy,$$

$$M = E\int_{c-b}^{c-a}\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{x\varphi\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)+y\varphi}{c-x}\,[x(\alpha-\varphi)+y]\, dx\, dy,$$

$$M = Eh\left[\varphi\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)(\alpha - \varphi)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 2ca - 2cb + c^2 \ln \frac{b}{a}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{h^2}{12} \varphi \ln \frac{b}{a}\right].$$

D'autre part, des conditions d'équilibre d'une moitié de l'anneau (fig. 462), il ressort que

$$2M = \int_0^\pi \frac{P}{2\pi b} b^2 \sin\theta \, d\theta - \int_0^\pi \frac{P}{2\pi a} a^2 \sin\theta \, d\theta, \quad M = \frac{P}{2\pi}(b - a).$$

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{P}{2\pi}(b - a) = Eh\varphi\left[\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)(\alpha - \varphi)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 2ca - 2bc + \right.\right.$$
$$\left.\left. + c^2 \ln \frac{b}{a}\right) + \frac{h^2}{12} \ln \frac{b}{a}\right].$$

Eliminant de là c et remplaçant α et φ respectivement par $H/(b - a)$ et $w/(b - a)$, w étant l'aplatissement du ressort, trouvons

$$P = \frac{2\pi Eh}{(b-a)^2} w\left[\left(H - \frac{w}{2}\right)(H - w)\left(\frac{1}{2}\frac{b+a}{b-a} - \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}\right) + \frac{h^2}{12} \ln \frac{b}{a}\right].$$

A l'aide d'une vérification numérique, on peut établir directement que pour $1 < b/a < 4$ la relation suivante sera juste

$$\frac{1}{2}\frac{b+a}{b-a} - \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \approx \frac{1}{12} \ln \frac{b}{a}.$$

C'est pourquoi,

$$P = \frac{\pi Eh}{6(b-a)^2} w \ln \frac{b}{a}\left[\left(H - \frac{w}{2}\right)(H - w) + h^2\right].$$

La dépendance obtenue entre la force P et l'aplatissement w du ressort est non linéaire et, en fonction de la relation H/h, peut prendre divers aspects.

La fig. 463 montre les courbes de dépendance

$$P_0 = P \frac{6(b-a)^2}{\pi Eh^4 \ln \frac{b}{a}}$$

en fonction de w/h pour différents H/h, c'est-à-dire,

$$P_0 = \frac{w}{h}\left[\left(\frac{H}{h} - \frac{1}{2}\frac{w}{h}\right)\left(\frac{H}{h} - \frac{w}{h}\right) + 1\right].$$

Voyons maintenant comment change d'aspect la caractéristique du ressort $P_0 = f(w/h)$ en fonction de H/h. La courbe correspondant à $H/h = 0$ représente la caractéristique d'un ressort plat pour disque. L'accroissement de la hauteur H provoque avant tout une augmentation de la rigidité initiale du ressort et, puis, une perturbation de la monotonie de l'allure de la courbe. Pour une valeur

de $H/h = \sqrt{2}$ (cela peut être aisément établi de l'analyse de l'expression obtenue), sur la courbe du ressort apparaît un tronçon à dérivée négative situé entre deux points extrémaux. On peut l'appeler tronçon de rigidité négative puisque, dans le cas présent, l'accroissement de la flèche se produit avec une diminution de la charge. Un tel régime de fonctionnement du ressort n'est pas stable, et les efforts

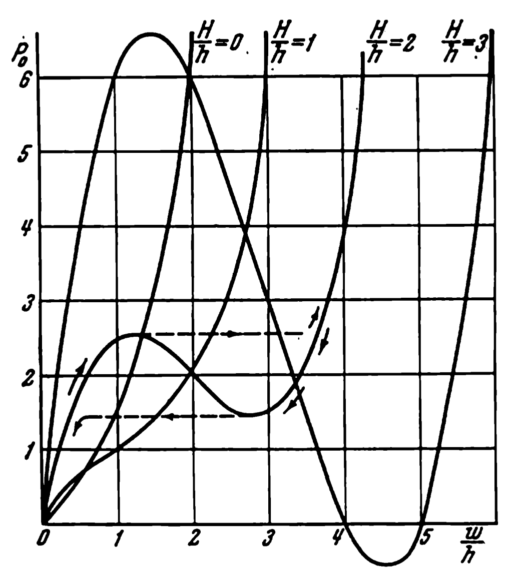


Fig. 463

correspondant aux points extrémaux seront critiques pour le ressort donné. Lorsque l'effort atteint le premier extrémum, le ressort va, par bond, changer de courbure en sautant le tronçon instable. Le fonctionnement ultérieur du ressort se passera sur la partie droite, stable et croissante, de la caractéristique. Le déchargement du ressort provoquera un changement inverse, par bond, de la flèche, et ce changement correspondra au second effort critique.

Une augmentation ultérieure de la hauteur H du ressort donne, comme on le voit de la fig. 463, une incurvation plus grande encore de la caractéristique, et pour des valeurs de $H/h > 2\sqrt{2}$ cette dernière commence à couper l'axe des abscisses. Pour une force $P = 0$, le ressort a, par conséquent, trois formes d'équilibre dont deux sont stables, tandis que la troisième, intermédiaire, instable. Après un flambage-claquement suivi d'un déchargement, un tel ressort ne revient pas dans sa position initiale et conserve une courbure résiduelle élastique correspondant au point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Comparer la solution de ce problème avec celle du problème 195.

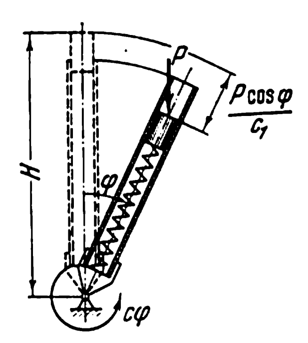


Fig. 464

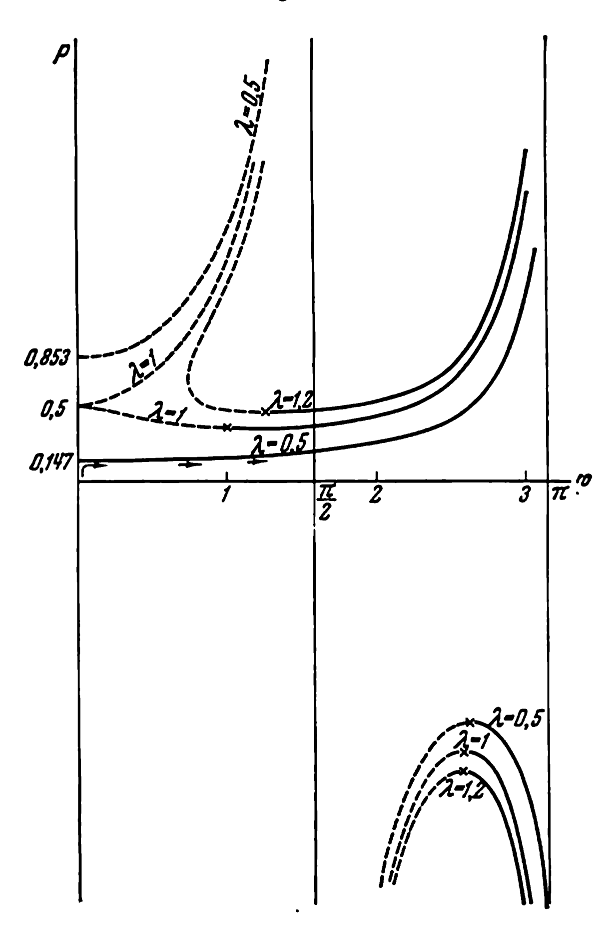


Fig. 465

197. Etudions la condition d'équilibre du tube dans une position inclinée (fig. 464). Si on désigne par H la distance qui sépare le bout supérieur du piston et l'articulation au début du chargement, alors, on aura de toute évidence,

$$P\left(H-\frac{P\cos\varphi}{c_1}\right)\sin\varphi=c\varphi, \tag{1}$$

d'où nous obtenons

$$\frac{P}{HC_1}=\frac{1}{2\cos\varphi}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4c}{c_1H^2}\varphi\operatorname{cotg}\varphi}\right].$$

Introduisons la notation:

$$\frac{P}{Hc_1}=p,\quad \frac{4c}{c_1H^2}=\lambda. \tag{2}$$

Nous aurons alors

$$p=\frac{1}{2\cos\varphi}\left[1\pm\sqrt{1-\lambda\varphi\operatorname{cotg}\varphi}\right].$$

Pour différents λ, la dépendance de p par rapport à φ aura divers aspects. La fig. 465 montre cette fonction pour des valeurs de $\lambda = 0{,}5$, $1{,}0$ et $1{,}2$ pour $0 \leqslant \varphi < \pi$. Les courbes obtenues correspondent aux formes d'équilibre du système dans une position inclinée par rapport à la verticale. En plus de cela, il existe une forme d'équilibre pour la position verticale de la barre (l'équation (1) est toujours satisfaite pour $\varphi = 0$). Sur la fig. 465 cette forme d'équilibre est donnée par des points se trouvant sur l'axe des ordonnées. Pour $\lambda = 0{,}5$ et, d'une manière générale, pour toutes les valeurs de $0 < \lambda < 1$, les courbes $p = p(\varphi)$ coupent l'axe des ordonnées en deux points dont le point inférieur correspond à la première valeur critique du paramètre p. Pour $\lambda = 0{,}5$, $p_{cr} = 0{,}147$. Au reste, généralement parlant,

$$p_{cr}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right),$$

ou

$$P_{cr}=\frac{Hc_1}{2}\left[1-\sqrt{1-\frac{4c}{c_1H^2}}\right].$$

Maintenant se pose la question de la stabilité des formes d'équilibre indiquées. Le minimum de l'énergie potentielle totale

$$U=\frac{c\varphi^2}{2}+\frac{c_1\Delta^2}{2}+P(H-\Delta)\cos\varphi$$

sert de critère de la position d'équilibre stable. Les deux premiers termes de cette expression représentent l'énergie de déformation, tandis que le dernier, la variation du potentiel de la force extérieure P. Comme $\Delta = (P\cos\varphi)/c_1$, nous obtenons

$$U=\frac{c\varphi^2}{2}+PH\cos\varphi-\frac{P^2\cos^2\varphi}{2c_1}.$$

La condition $dU/d\varphi = 0$ est la condition d'équilibre (la condition d'extrémum (de l'énergie) et nous conduit, comme on devait s'y

attendre, à l'équation (1) obtenue plus haut. La condition de minimum de l'énergie s'écrit comme suit

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} > 0,$$

ou

$$c - PH\cos\varphi + \frac{P^2}{c_1}\cos 2\varphi > 0.$$

Conformément aux notations (2), nous avons

$$\frac{\lambda}{4} - p\cos\varphi + p^2\cos 2\varphi > 0.$$

Etudiant les courbes obtenues, nous remarquons que pour certains tronçons de ces courbes, la condition de stabilité est remplie, tandis que pour d'autres, non. Sur la fig. 465 les tronçons correspondant à l'équilibre instable sont montrés en pointillé. La condition de stabilité pour l'axe des ordonnées s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\lambda}{4} - p + p^2 > 0,$$

de là, nous obtenons :

$$p < \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\lambda}) \quad \text{et} \quad p > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\lambda}).$$

Pour $\lambda = 0{,}5$, par exemple, la position verticale du tube sera instable pour

$$0{,}853 > p > 0{,}147.$$

Sur la fig. 465, la flèche montre l'accroissement de l'angle φ en fonction de la force P dans le cas de $\lambda = 0{,}5$. Au début, l'angle φ reste égal à zéro. Pour $p = 0{,}147$, le tube dévie de la verticale, puis, au fur et à mesure que la force P croît, l'angle φ tend asymptotiquement vers $\varphi = \pi$. Avec cela, pour $\varphi > \pi/2$, la force P tendra à pousser le piston hors du tube. Dans un système réel, le déplacement du piston et, parallèlement, l'accroissement de la force P se trouvent limités par la longueur du tube.

Les courbes tracées montrent que l'angle φ peut lui aussi tendre asymptotiquement vers $\pi/2$, par exemple, pour le cas de $\lambda = 0{,}5$, pour $p > 0{,}853$. Cela signifie que pour une force suffisamment grande, l'aplatissement du ressort se trouvant dans le tube croît si fortement et, parallèlement à cela, le bras de levier de la force P décroît si vite, que cette dernière n'est pas en mesure de mettre le tube plus bas que l'horizontale. A la limite, pour $\varphi = \pi/2$, l'aplatissement du ressort $(P\cos\varphi)/c_1$, comme on peut facilement s'en rendre compte, est égal à H. Ces formes d'équilibre sont cependant instables.

Pour $\lambda > 1$, c'est-à-dire pour une rigidité suffisamment grande du ressort en spirale ou pour une hauteur ou une rigidité c_1 du second

ressort suffisamment petite, la position verticale du tube, pour n'importe quelles valeurs de la force P, restera toujours stable bien qu'il existe aussi des formes d'équilibre du ressort dans une position inclinée. Pour que le tube adopte cette forme d'équilibre, il faut lui communiquer, à l'aide d'une force extérieure, une grande déviation latérale.

La fig. 465 montre aussi les branches des courbes $p = p(\varphi)$ correspondant aux valeurs négatives de p. Ces courbes montrent que pour $\pi/2 \leqslant \varphi < \pi$, le tube peut se trouver en équilibre sous une force d'un signe opposé. On peut facilement se représenter cette forme d'équilibre en tenant compte de ceci que, théoriquement, le piston peut se déplacer dans le tube d'une valeur plus grande que H. Pour $\Delta > H$, la force P, dotée d'un signe opposé, va retenir le tube dans la position d'équilibre indiquée.

Ainsi, nous avons étudié les formes d'équilibre pour $0 \leqslant \varphi < \pi$. Cela n'épuise pas, cependant, toute la multitude des formes possibles. On aurait pu continuer l'analyse de cette question en élargissant la zone de variation de l'angle φ à droite, au-delà de π, et à gauche, au-delà de zéro.

Le cas que l'on vient d'étudier constitue un exemple de la nonlinéarité la plus simple où, sans beaucoup de difficulté, on parvient à obtenir une solution exhaustive et à montrer de façon claire son caractère multivoque. En général, la résolution des problèmes non linéaires constitue une des questions les plus actuelles et les plus compliquées de la mécanique et des mathématiques modernes.

198. Ce problème est un problème type sur les grands déplacements d'une barre flexible.

Référons-nous à la solution du problème 137. La barre élastique montrée à la fig. 367 (p. 248) peut être comparée à la moitié d'un arc.

Pour $s = l$, l'expression (5) (p. 249) prend la forme suivante:

$$\beta = F(\psi_L) - F(\psi_0). \qquad (1')$$

Pour $s = l$, la courbure de la barre est égale à zéro ($d\zeta/ds = 0$). C'est pourquoi, de (4) (p. 249), il découle que

$$k \cos \psi_L = 0 \quad \left(\psi_L = \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2')$$

Pour $s = 0$, $\zeta = \delta$. De cette condition, ainsi que de l'expression (3) (p. 249), nous obtenons

$$\sin \frac{\delta}{2} = k \sin \psi_0. \qquad (3')$$

Examinons d'abord la première phase de flexion de la barre: la tension de la corde (fig. 466). Dans ce cas, comme on le voit de la fig. 367, $\delta = 0$. C'est pourquoi, de (3') il découle que $\psi_0 = 0$. Pour ce même cas, nous avons

$$x_L = a, \quad y_L = h.$$

Les conditions (5) et (7) (p. 249 et 250) donnent

$$\beta = l\sqrt{\frac{P_1}{EJ}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{a}{l} = \frac{2}{\beta} E\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1, \quad \frac{h}{l} = \frac{2k}{\beta}.$$

Fixons-nous quelques valeurs de k et, nous aidant des tables pour les intégrales elliptiques, trouvons des dernières équations β, a/l

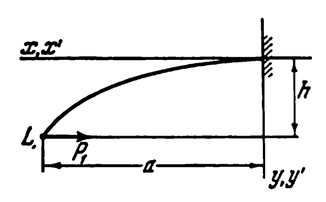


Fig. 466

et h/l. Portons les résultats dans la table suivante:

arcsin k	0	5°	10°	15°
β	1,571	1,574	1,583	1,598
$\frac{a}{l}$	1	0,990	0,967	0,931
$\frac{h}{l}$	0	0,111	0,219	0,324

Interpolant les résultats obtenus, trouvons pour $h/l = 0{,}3$ donné les valeurs suivantes:

$$\beta = l\sqrt{\frac{P_1}{EJ}} = 1{,}59, \quad \frac{a}{l} = 0{,}945.$$

Ainsi, nous obtenons l'effort P_1 agissant dans la corde tendue ainsi que la longueur a de cette dernière, laquelle demeurera invariable lors des déformations ultérieures du système.

Etudions maintenant la seconde étape de flexion de la barre. Ici, la grandeur ψ_0 n'est pas égale à zéro et reste inconnue. Nous procéderons à la détermination de cette grandeur de la manière suivante. Fixons-nous des valeurs de k et ψ_0. De l'expression (3'), trouvons d'après la condition:

$$k \sin \psi_0 = \sin \frac{\delta}{2}.$$

Puis, de (1'), déterminons

$$\beta = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\psi_0).$$

Les expressions (6) (p. 250) donnent

$$\frac{x'_L}{l} = \frac{2}{\beta}\left[E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E(\psi_0)\right] - 1,$$

$$\frac{y'_L}{l} = \frac{2}{\beta} k \cos \psi_0,$$

tandis que des expressions (7) (p. 250), nous trouverons

$$\frac{x_L}{l} = \frac{x'_L}{l} \cos \delta + \frac{y'_L}{l} \sin \delta,$$

$$\frac{y_L}{l} = \frac{y'_L}{l} \cos \delta - \frac{x'_L}{l} \sin \delta.$$

Enfin, déterminons la longueur a de la corde (fig. 467):

$$a = \frac{x_L}{\cos \delta},$$

d'où

$$\frac{a}{l} = \frac{\frac{x_L}{l}}{\cos \delta}.$$

Ce rapport doit être égal à 0,945. En maintenant k constant, fixons-nous quelques valeurs de ψ et répétons les calculs jusqu'à ce qu'on

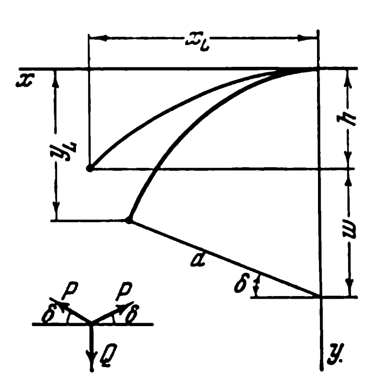


Fig. 467

obtienne a/l égal à 0,945. Nous effectuerons ce genre de sélection pour quelques valeurs de k. Portons les résultats dans la table:

arcsin k	15°	20°	25°	30°	35°
ψ_0	6°	15°	20°	21°	23°
$\frac{x}{l}$	0,943	0,932	0,906	0,883	0,850
$\frac{y}{l}$	0,294	0,325	0,366	0,425	0,472
β	1,493	1,358	1,299	1,317	1,326

Calculons ensuite le déplacement w (fig. 467):

$$\frac{w}{l} = \frac{a}{l}\sin\delta + \frac{y_L}{l} - \frac{h}{l},$$

ainsi que l'effort Q (fig. 467):

$$Q = 2P\sin\delta, \quad \frac{Ql^2}{EJ} = 2\beta^2\sin\delta.$$

Pour les mêmes valeurs de k et ψ_0, nous obtenons

$\frac{w}{l}$	$\frac{Ql^2}{EJ}$
0,045	0,24
0,192	0,651
0,337	0,967
0,459	0,22
0,585	1,54

La fig. 468 montre le graphique exprimant la dépendance de Ql^2/EJ par rapport à w/l. L'aire délimitée par cette courbe sur l'intervalle 0 — w/l donne l'expression de l'énergie élastique transmise à la flèche lors du lâchage. Sur la fig. 468 on a montré également la courbe intégrale pour l'énergie U. Cette courbe a été obtenue par un simple planimétrage du premier graphique.

Passons maintenant à un calcul numérique. Pour $w/l = 0,6$, lisons sur la courbe

$$\frac{Ul}{EJ} = 0,53,$$

$$U = 0,53\,\frac{EJ}{l} = 0,53\,\frac{10^5\cdot\pi\cdot 2^4}{64\cdot 60} = 695 \text{ kgf}\cdot\text{cm}.$$

Egalons cette énergie à l'énergie cinétique de la flèche

$$U = \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2U}{m}},$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 695\cdot 981}{0,040}} = 5800 \text{ cm/s} = 58 \text{ m/s}.$$

En réalité la vitesse v sera un peu plus petite car une partie de l'énergie sera dépensée pour communiquer de l'énergie cinétique

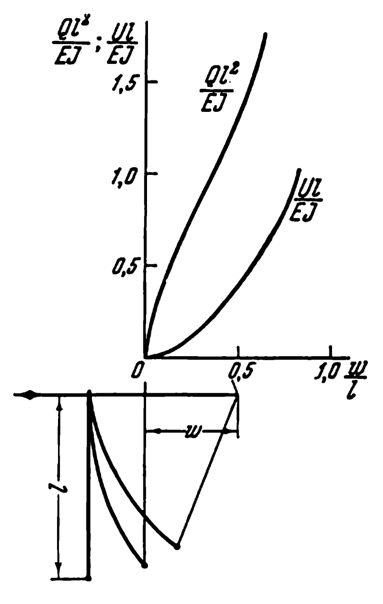


Fig. 468

à la corde ainsi qu'à la verge de l'arc. L'effort Q qu'il faut appliquer à l'arc pour conférer à la flèche la vitesse qui vient d'être calculée se détermine également du graphique de la fig. 468:

$$\left.\frac{Ql^2}{EJ}\right|_{\frac{w}{l}=0,6} = 1,6 \qquad Q = 1,6\,\frac{10^5 \cdot \pi \cdot 2^4}{64 \cdot 60^2} = 35 \text{ kgf}.$$

TABLE DES MATIÈRES